Математика ЕГЭ 2014
(открытый банк заданий)

Задания В8

Производная и первообразная функции

Материалы подготовили:
Корянов А. Г. (г. Брянск); e-mail: akoryanov@mail.ru
Надежкина Н.В. (г. Иркутск); e-mail: nadezhkina@yahoo.com

СОДЕРЖАНИЕ

Элементы содержания, проверяемые заданиями В8 по кодификатору:

4.1. Производная.

4.2. Исследование функции.

4.3. Первообразная и интеграл.

Проверяемые требования (умения) в заданиях В8 по кодификатору:

3.1. Определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описывать по графику поведение и свойства функций, находить по графику функции наибольшие и наименьшие значения; строить графики изученных функций.

3.2. Вычислять производные и первообразные элементарных функций.

3.3. Исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций.

Введение

Данное пособие является восьмым в серии пособий для подготовки к части В ЕГЭ по математике и посвящено решению задачи В8 (по нумерации ЕГЭ 2012-2013 года) – так называемой «задачи на производную и интеграл». По новой нумерации (ЕГЭ 2014) теперь это задача В9, которая входит в первую часть экзаменационного варианта. Можно сказать, что теперь это самая сложная задача из негеометрических задач первой части экзамена.

Средний процент правильных ответов к совершенно «стандартной» задаче В8 на определение углового коэффициента касательной по ее графику – 64,8% (ЕГЭ 2012). Это довольно низкий процент, если учесть то, что большинство задач В8 (особенно задачи «с графиками») либо решается устно, либо для их решения требуется короткая цепочка несложных вычислений. Причины, на наш взгляд, следующие. Во-первых, эта задача на материал курса алгебры и начал 10-11 классов, для освоения которого необходима достаточная база знаний программы основной школы, которой, к большому сожалению, нет сейчас у многих старшеклассников. Во-вторых, несмотря на невысокий уровень сложности самого задания, спектр проверки понимания темы «производная» в этом задании, к примеру, довольно широк – предлагаются и задачи на геометрический и механический смысл производной, и задачи с множеством ситуаций, описывающих связь между поведением функции и ее производной. В-третьих, для решения большинства задач В8 требуется не просто непосредственно применить алгоритм (что можно сделать, например, при решении простейших уравнений), а самостоятельно проанализировать ситуацию и сделать вывод. Даже в случае крайней простоты анализа все это требует от старшеклассников некоторых усилий, к которым не все готовы.

Как же подготовить обычного старшеклассника к решению любого задания В8? Один из эффективных способов состоит в следующем. После полного завершения изучения темы «Производная и ее применение» можно организовать повторение в форме подготовки к решению задачи В8, предусмотрев на это несколько учебных часов. Необходимо повторить с краткой записью на доске и в тетрадях понятие геометрического смысла производной, условие параллельности двух прямых и решить задачи 1.1.1-1.5.1, 3.9.1.-3.14.1, 4.13.1-4.15.1 данного пособия с полным разбором и аккуратной записью решения. Затем повторить с краткой записью на доске и в тетрадях понятие механического (физического) смысла производной и решить задачи 2.1.1-2.5.1 данного пособия, также с полным разбором и аккуратной записью решения. Построить на доске и в тетрадях краткую таблицу соответствия между поведением функции и поведением ее производной

Функция $y = f(x)$	Производная $y' = f'(x)$
возрастает	$f'(x) > 0$
убывает	$f'(x) < 0$
имеет экстремум	$f'(x) = 0$, меняет знак
имеет максимум	$f'(x) = 0$, меняет знак с «+» на «–»
имеет минимум	$f'(x) = 0$, меняет знак с «–» на «+»

и решить все оставшиеся задачи с графиками функции и производной функции, кроме двух последних серий задач на одном графике, при необходимости с неоднократной ссылкой на эту таблицу. Аналогичные задачи (1.1.2-1.5.2 и т.д.) предложить для решения дома. На следующем уроке сверить ответы, разобрать ошибки и задать еще одно домашнее задание – задачи 1.1.3-1.5.3 и т.д., или те самые две серии задач на одном графике. Задачи 5.1.1-5.4.1 можно разобрать аналогично после полного изучения темы «Первообразная и интеграл».

После повторения, организованного в такой форме, основные подходы к решению задач В8 будут ясны для большинства учащихся. Как показывает репетиторский опыт и результаты решения задания В8 на диагностических работах и реальном ЕГЭ, надежды на то, что, изучив тему «Производная и ее применение» по школьному учебнику, учащиеся «сами догадаются», как решить любую задачу В8, чаще всего не оправдываются. Возможно, и догадаются, но далеко не все и не факт, что любую задачу.

Что делать в плане подготовки к решению В8 со слабо мотивированными учащимися с крайне низким уровнем знаний? На первом этапе подготовки к ЕГЭ (до 8 верно решенных заданий в произвольном варианте) – сосредоточиться на других заданиях, допускающих решение по простым алгоритмам. Далее – разобрать некоторые простые В8, также допускающие решение по алгоритмам (например, нахождение углового коэффициента касательной или площади трапеции геометрическими методами). Только при наличии времени для дальнейшей подготовки и ощутимом прогрессе ученика стоит попробовать научить его анализу ситуаций с графиками, причем в первое время с непосредственной опорой на таблицу соответствия поведения функции и ее производной.

В качестве практического материала при составлении данного пособия авторами были использованы задачи «от составителей» из «открытого банка заданий» [5], а также некоторые избранные задачи из диагностических и тренировочных работ МИОО и задачи из изданий «Типовых тестовых заданий» [2], [3].

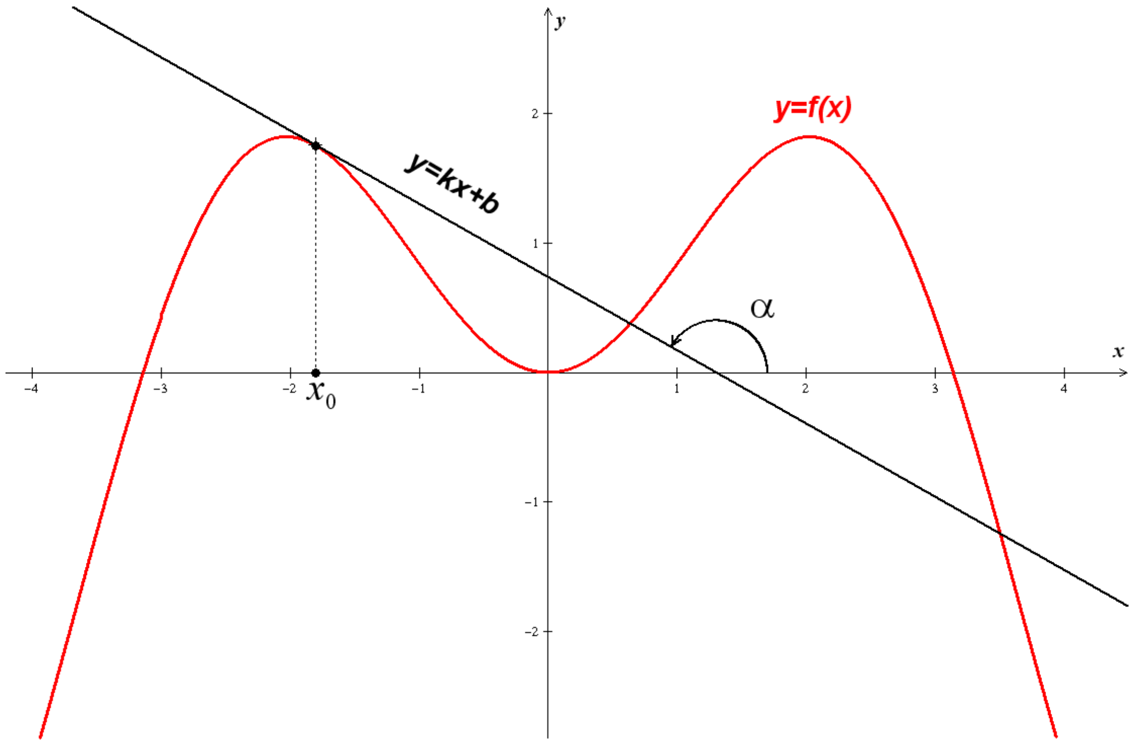
Структура пособия такова, что задачи из «открытого банка заданий», наряду с фиксированным номером из открытого банка заданий (он расположен в скобках непосредственно перед текстом задачи), имеют также собственную тройную нумерацию внутри каждого раздела. Все типы задач из «открытого банка заданий» систематизированы по содержанию. Каждый тип задачи представлен тремя задачами (первая из этих трех задач и есть прототип данного типа задач), что позволяет учащемуся при необходимости неоднократно проверить себя, а учителю - использовать дополнительные задания в виде отдельных, уже готовых трех вариантов для домашних или проверочных работ. Таким образом, первое число в тройной нумерации каждой задачи означает номер раздела, второе число – номер типа задачи внутри раздела, третье число - номер задачи внутри типа (или номер варианта).

Для первых задач каждого типа представлены подробные решения, для всех задач есть ответы.

Мы постарались сделать так, чтобы пособие было полезно и для ученика практически любого уровня подготовки, и для учителя, и для репетитора. Ответы и решения задач-прототипов представлены отдельно для того, чтобы в конкретном экземпляре пособия можно было легко оставить только нужную форму ответов или решений для проверки либо самопроверки. Например, в экземплярах пособий, предлагаемых для уверенных в своих силах учеников, можно вообще убрать и ответы, и решения. Для менее уверенных в своих силах учащихся можно оставить только решения задач-прототипов. Для учителя и репетитора необходимы как раз ответы ко всем задачам для упрощения процесса проверки и оценки домашних и самостоятельных работ.

1. Геометрический смысл производной

Знание углового коэффициента касательной к графику функции позволяет ответить на некоторые вопросы при исследовании этой функции.



● Уравнение касательной (прямой) имеет вид $y = kx + b$, где k – угловой коэффициент, который характеризует угол, который образует прямая $y = kx + b$ с положительным направлением оси *Ox*. Если $k > 0$, то этот угол острый; если $k < 0$, то – тупой; если $k = 0$, то прямая параллельна оси *Ox* или совпадает с ней.

● Значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой x_0:

$$f'(x_0) = k.$$

Если производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна нулю, то касательная, проведенная к графику этой функции в точке с абсциссой x_0, параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

● Угловой коэффициент касательной равен тангенсу угла наклона касательной с положительным направлением оси абсцисс

$$k = \operatorname{tg}\alpha,$$

где α - угол наклона касательной. Отсюда

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha.$$

● Условия касания прямой $g(x) = kx + b$ и графика функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

$$\begin{cases} f'(x_0) = k, \\ f(x_0) = g(x_0). \end{cases}$$

● Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

● Две прямые, заданные уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, параллельны или совпадают, если $k_1 = k_2$.

Пример 1. Найдите значение параметра, при котором прямая $y = 2x + b$ будет являться касательной к графику функции $y = x^2 - 2x + 3$.

Решение. 1-й способ. Используем условия касания прямой и графика данной функции в точке с абсциссой x_0.

$$\begin{cases} 2x_0 - 2 = 2, \\ x_0^2 - 2x_0 + 3 = 2x_0 + b. \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = 2, \\ 2^2 - 2\cdot 2 + 3 = 2\cdot 2 + b. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ b = -1. \end{cases}$$

2-й способ. Так как касательная – предельное положение секущей, то для абсциссы точки касания квадратное уравнение $x^2 - 2x + 3 = 2x + b$ или $x^2 - 4x + 3 - b = 0$ должно иметь два совпадающих корня. Приравнивая дискриминант данного квадратного уравнения $D = 16 - 4(3 - b)$ к нулю, получаем $16 - 4(3 - b) = 0$, $3 - b = 4$, $b = -1$.
Ответ: –1.

***

1.1.1.(прототип 27485) Прямая $y = 7x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x - 8$. Найдите абсциссу точки касания.
1.1.2.(6019) Прямая $y = -5x + 4$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 3x + 6$. Найдите абсциссу точки касания.
1.1.3.(6041) Прямая $y = -3x - 6$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 5x - 4$. Найдите абсциссу точки касания.

***

1.2.1.(прототип 27486) Прямая $y = -4x - 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.
1.2.2.(6045) Прямая $y = 8x - 9$ является касательной к графику функции $y = x^3 + x^2 + 8x - 9$. Найдите абсциссу точки касания.
1.2.3.(6067) Прямая $y = -5x + 14$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 2x + 15$. Найдите абсциссу точки касания.

***

1.3.1.(прототип 119972) Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $ax^2 + 2x + 3$. Найдите a.
1.3.2.(120217) Прямая $y = -3x - 8$ является касательной к графику функции $ax^2 + 27x + 7$. Найдите a.
1.3.3.(120715) Прямая $y = -9x + 5$ является касательной к графику функции $ax^2 + 15x + 11$. Найдите a.

***

1.4.1.(прототип 119973) Прямая $y = -5x + 8$ является касательной к графику функции $28x^2 + bx + 15$. Найдите *b*, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

1.4.2.(120717) Прямая $y = 9x + 5$ является касательной к графику функции $18x^2 + bx + 7$. Найдите *b*, учитывая, что абсцисса точки касания меньше 0.

1.4.3.(121211) Прямая $y = -7x - 5$ является касательной к графику функции $28x^2 + bx + 2$. Найдите *b*, учитывая, что абсцисса точки касания меньше 0.

***

1.5.1.(прототип 119974) Прямая $y = 3x + 4$ является касательной к графику функции $3x^2 - 3x + c$. Найдите c.

1.5.2.(121217) Прямая $y = 5x - 8$ является касательной к графику функции $4x^2 - 15x + c$. Найдите c.

1.5.3.(121711) Прямая $y = 2x - 6$ является касательной к графику функции $6x^2 + 26x + c$. Найдите c.

2. Физический (механический) смысл производной

● Если $x(t)$ - закон движения материальной точки, то значение мгновенной скорости движения тела равно значению производной функции $x(t)$ в момент времени $t = t_0$

$$\upsilon(t_0) = x'(t_0).$$

Пример 2. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -t^2 + 10t$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите расстояние, пройденное точкой от начала движения до остановки.

Решение. Найдем момент времени, когда скорость точки равна нулю. Так как $x'(t) = -2t + 10$, то из уравнения $-2t + 10 = 0$ находим $t = 5$. Тогда искомое расстояние равно $x(5) = -5^2 + 10 \cdot 5 = 25$ (м).

Ответ: 25 м.

***

2.1.1.(прототип 119975) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 9$ с.

2.1.2.(121717) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{6}t^2 + 4t - 20$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 6$ с.

2.1.3.(122213) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -\frac{1}{4}t^2 + 8t + 14$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 8$ с.

***

2.2.1.(прототип 119976) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 2t$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 6$ с.

2.2.2.(122217) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{3}t^3+4t^2+3t+20$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t=4$ с.

2.2.3.(122711) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=-\frac{1}{6}t^3+4t^2-6t-18$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t=10$ с.

***

2.3.1.(прототип 119977) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=-t^4+6t^3+5t+23$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t=3$ с.

2.3.2.(122717) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=-\frac{1}{3}t^4+4t^3-7t^2-5t-5$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t=6$ с.

2.3.3.(123201) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{6}t^4+3t^3-8t^2+9t-29$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t=3$ с.

***

2.4.1.(прототип 119978) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=t^2-13t+23$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?

2.4.2.(123217) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{6}t^2+5t+28$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 6 м/с?

2.4.3.(123711) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{4}t^2+t-10$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 5 м/с?

***

2.5.1.(прототип 119979) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2-5t+3$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?

2.5.2.(123717) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{3}t^3+4t^2-8t-16$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 1 м/с?

2.5.3.(124215) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{6}t^3-2t^2-4t+3$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 38 м/с?

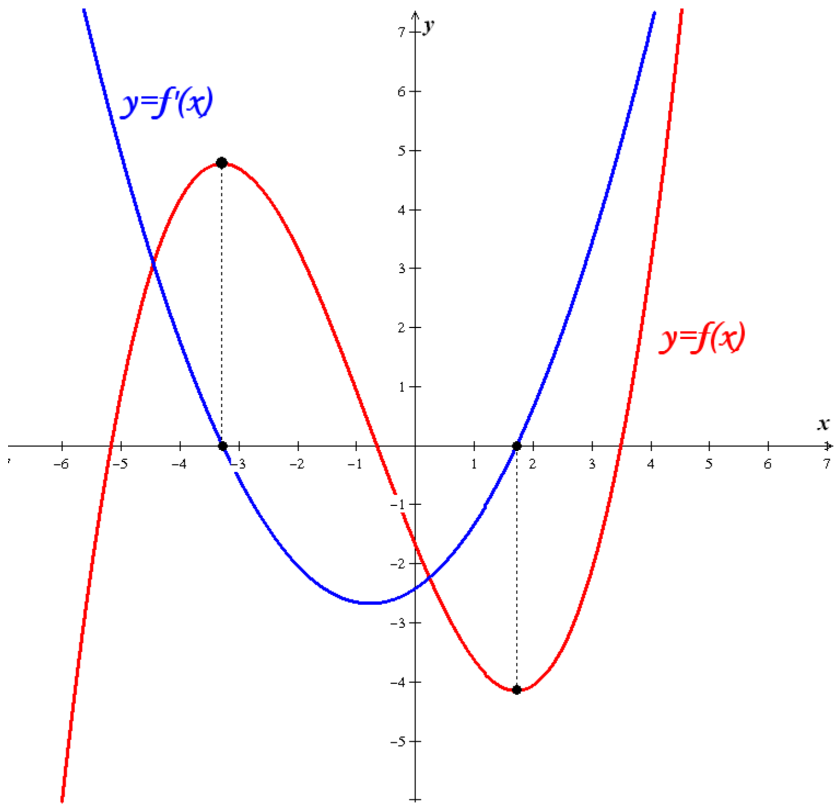
3. График функции

В данном разделе рассмотрим задачи, в которых по графику функции необходимо ответить на вопросы о свойствах производной данной функции.

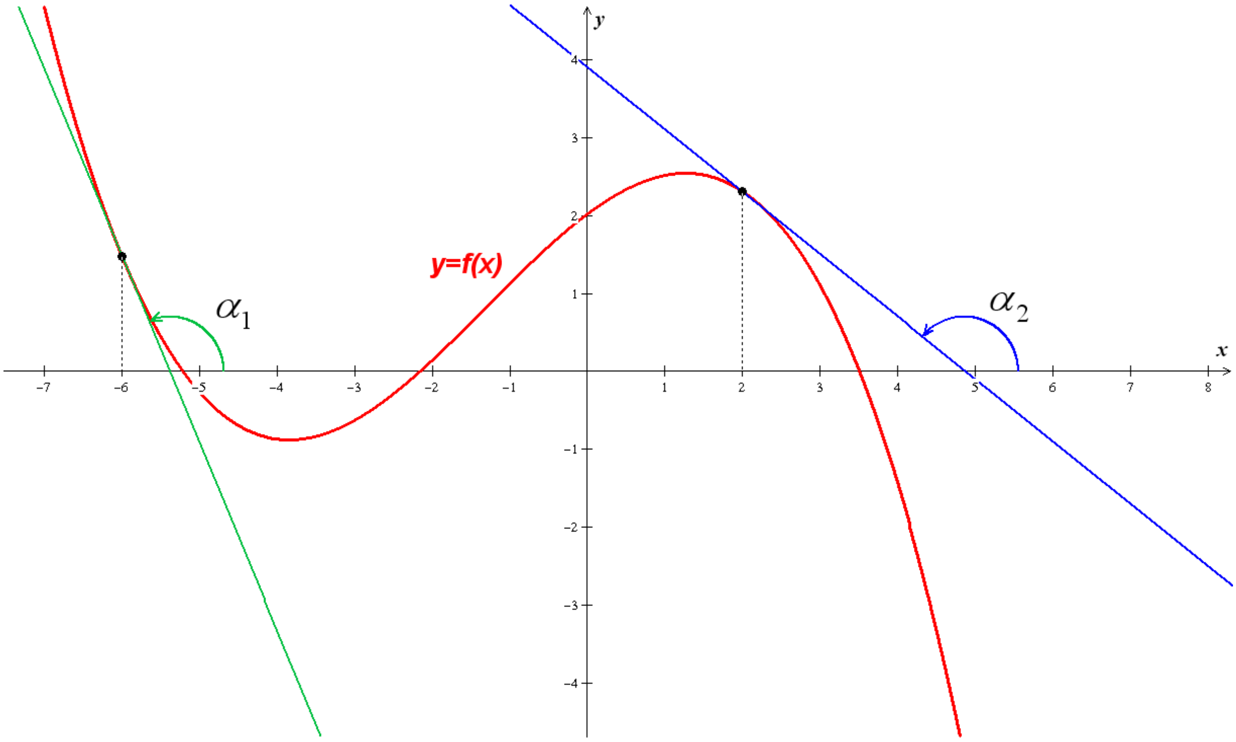
Промежутки монотонности функции

● *Промежутки монотонности функции* – это промежутки оси *x*, на которых функция возрастает (промежутки возрастания) или убывает (промежутки убывания). Геометрически – это интервалы оси *x*, где график функции идет вверх или вниз.
● Если дифференцируемая функция возрастает на промежутке, то ее производная неотрицательна на этом промежутке.
● Если дифференцируемая функция убывает на промежутке, то ее производная неположительна на этом промежутке.

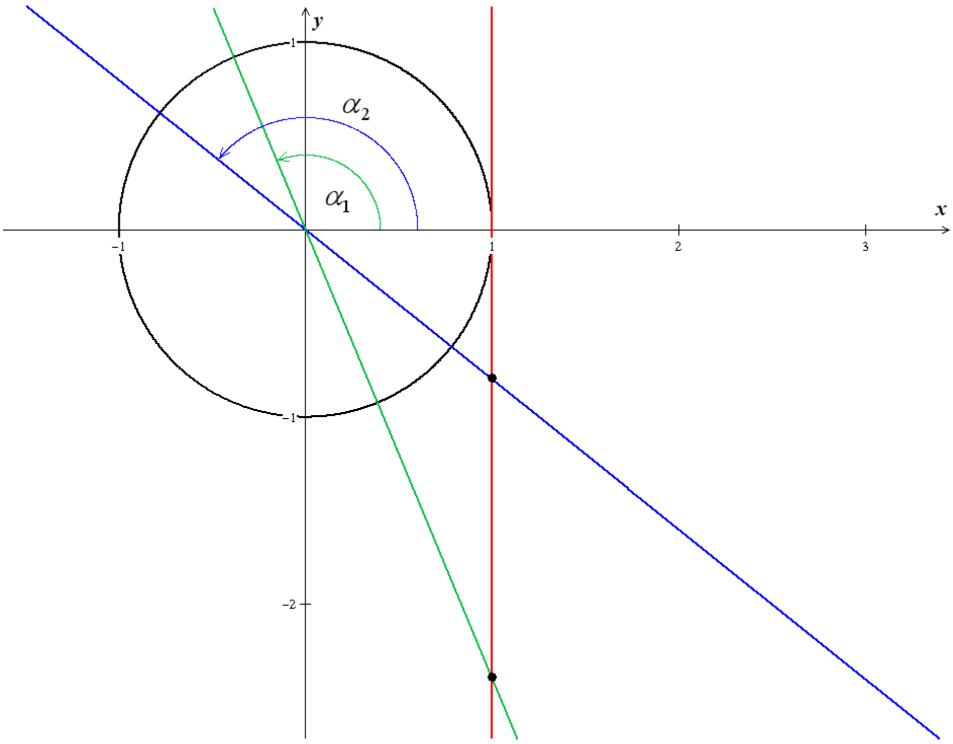
● Связь между свойствами функции и свойствами ее производной можно проиллюстрировать на их графиках в одной системе координат.



Пример 3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки –6, 2. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



Пусть в точке с абсциссой –6 проведена касательная к графику функции $y = f(x)$, имеющая угол наклона α_1, а в точке с абсциссой 2 проведена касательная, имеющая угол наклона α_2. Используя единичную окружность и линию тангенсов для наглядности, легко показать, что $\mathrm{tg}\alpha_1 < \mathrm{tg}\alpha_2 < 0$. Но так как $f'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha$, то $f'(-6) < f'(2) < 0$.

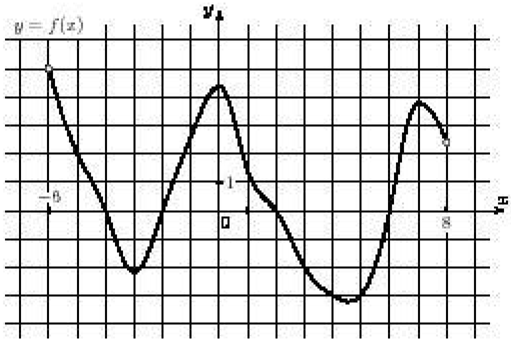


Замечание. Проще говоря, мы смотрим, насколько круто идет вниз график функции, или по-иному – насколько быстро меняется y с изменением x.

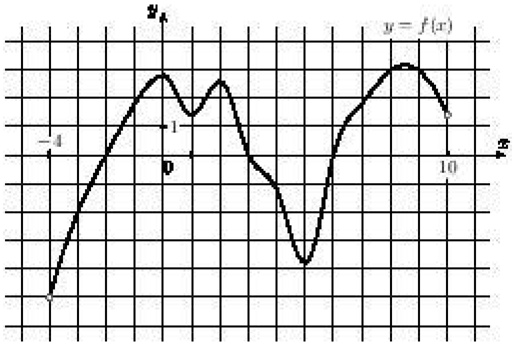
Ответ: –6.

***

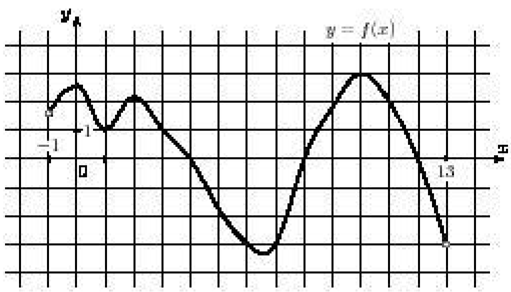
3.1.1.(прототип 27487) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6;8)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



3.1.2.(6889) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-4;10)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна.

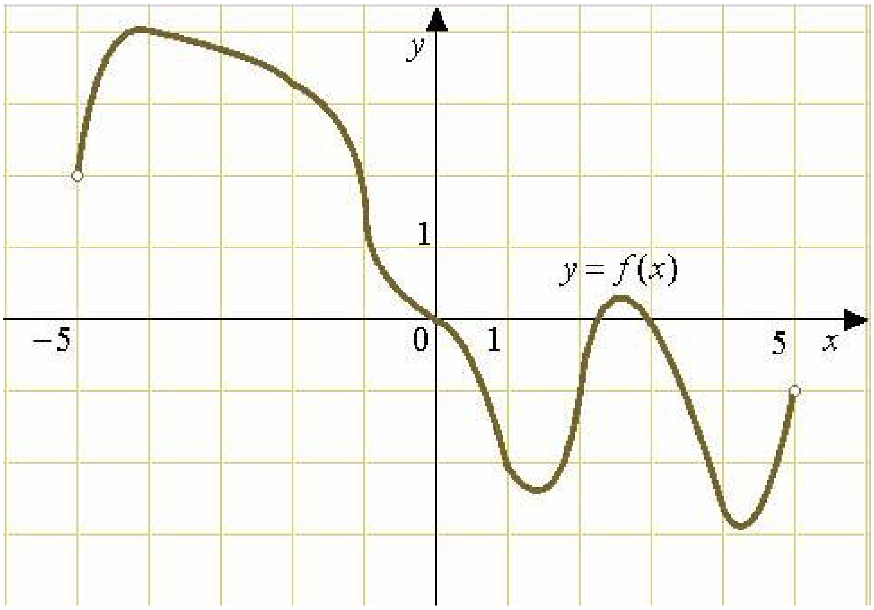


3.1.3.(7089) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-1;13)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

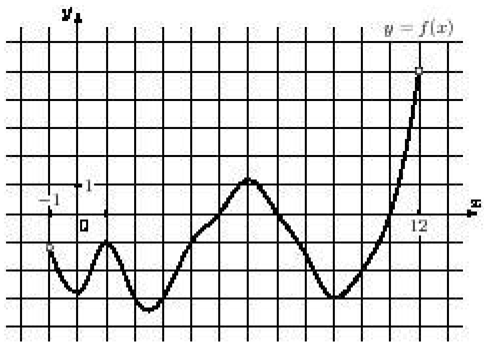


***

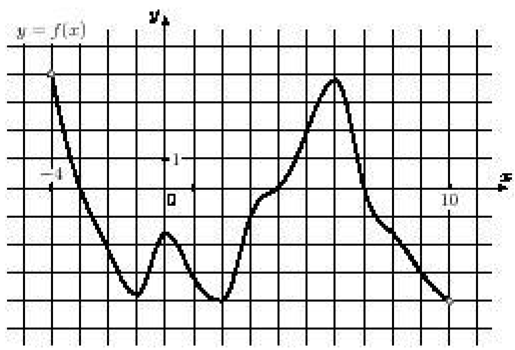
3.2.1.(прототип 27488) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5;5)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.



3.2.2.(6871) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-1;12)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

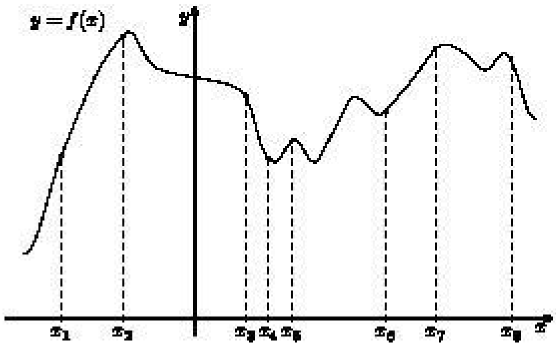


3.2.3.(7073) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-4;10)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

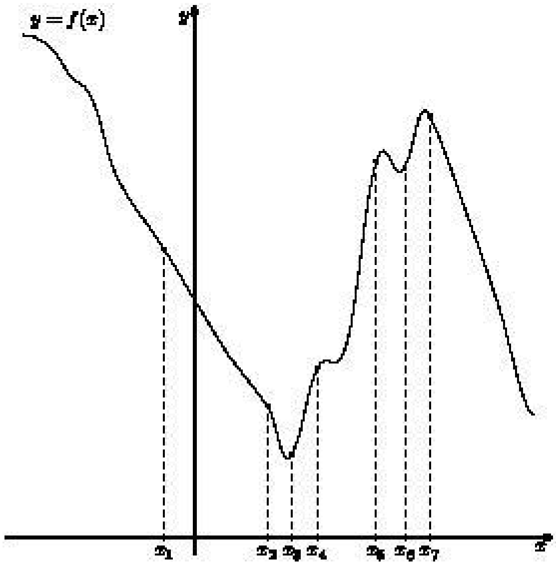


***

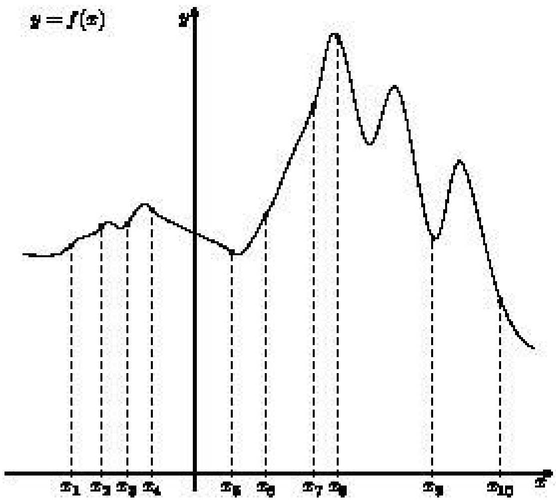
3.3.1.(прототип 317539) На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, ..., x_8$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



3.3.2.(317551) На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, ..., x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

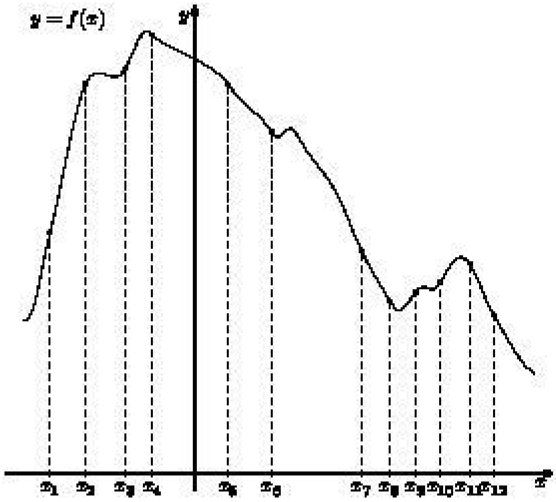


3.3.3.(317637) На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

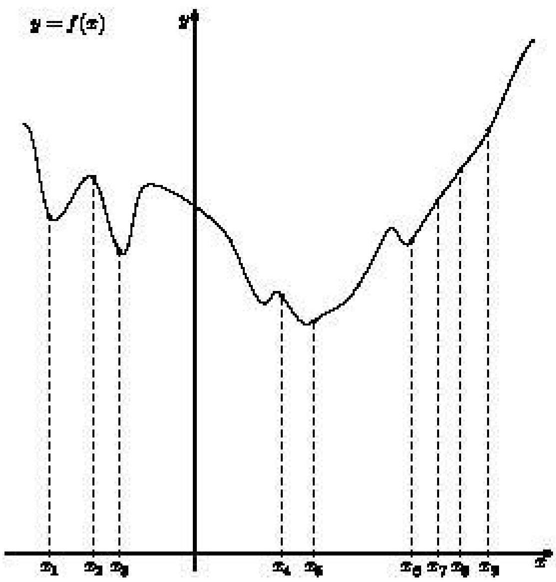


***

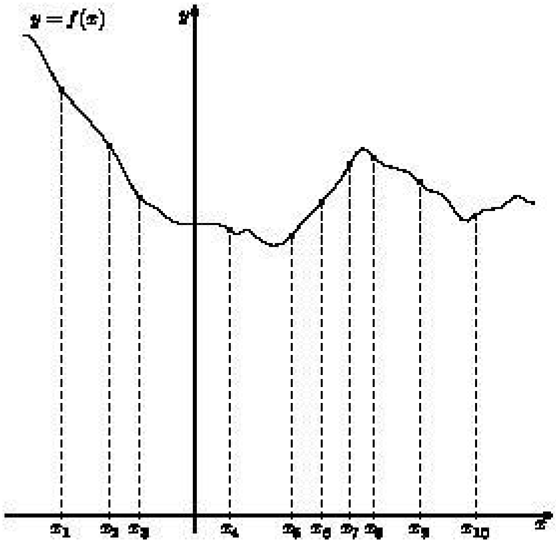
3.4.1.(прототип 317540) На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, ..., x_{12}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



3.4.2.(317647) На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и девять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, ..., x_9$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

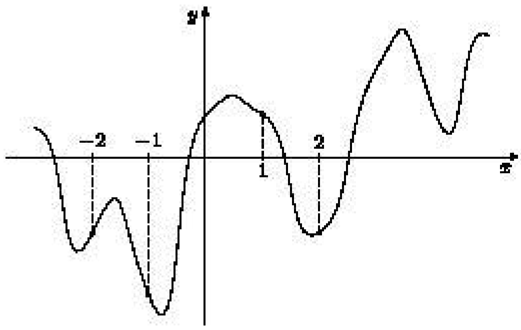


3.4.3.(317737) На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и девять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

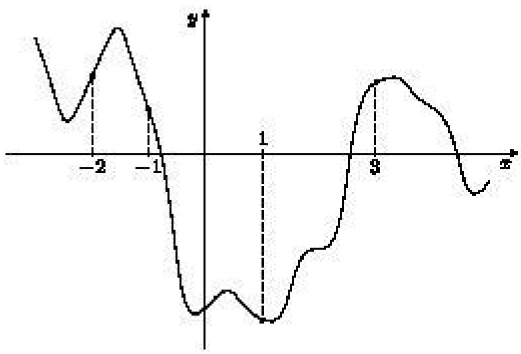


***

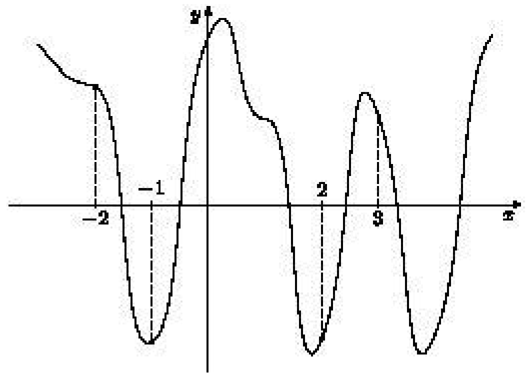
3.5.1.(прототип 317543) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки –2, –1, 1, 2. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



3.5.2.(317945) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки –2, –1, 1, 3. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.

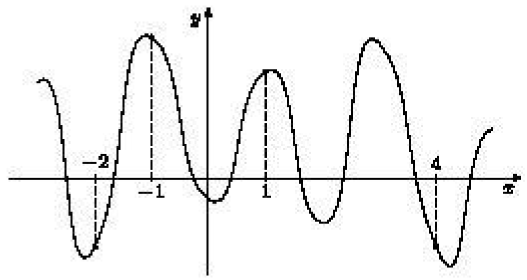


3.5.3.(318043) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки –2, –1, 2, 3. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.

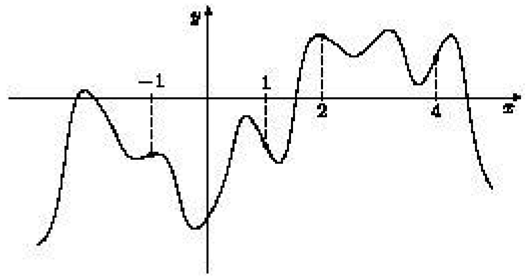


***

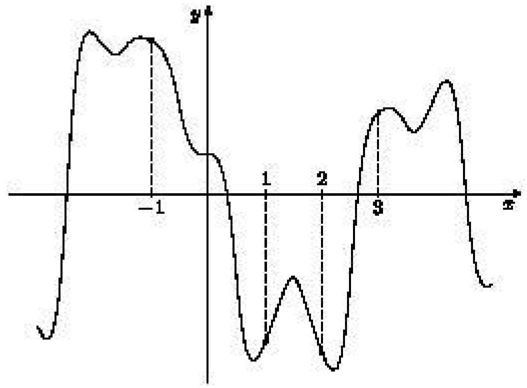
3.6.1.(прототип 317544) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки –2, –1, 1, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



3.6.2.(318045) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки –1, 1, 2, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



3.6.3.(318143) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки –1, 1, 2, 3. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

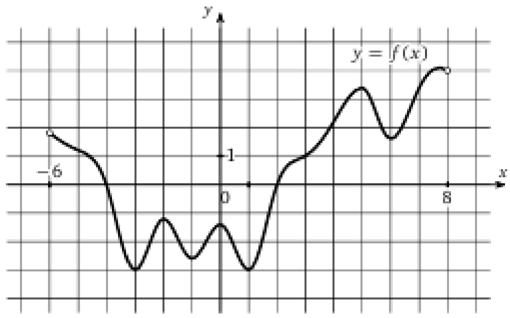


Точки экстремума функции

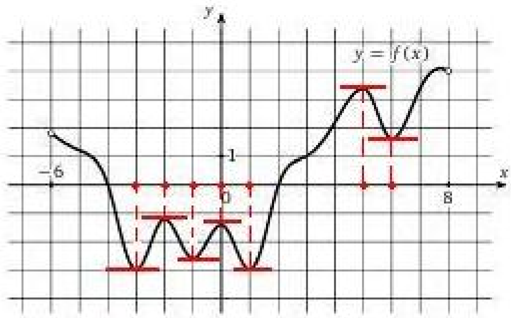
Точки экстремума – точки, лежащие внутри области определения, в которых функция принимает самое большое (максимум) или самое малое (минимум) значение по сравнению со значениями в близких точках. Геометрически – около точек экстремума график функции выгибается вверх или вниз. Обычно точки экстремума разделяют промежутки монотонности.

Необходимое условие экстремума функции. В точке экстремума функции ее производная обращается в нуль.

Пример 4. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6;8)$. Найдите: **а)** количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -1000000$; **б)** сумму точек экстремума функции $f(x)$.



Решение. **а)** Прямая $y = -1000000$ имеет угловой коэффициент $k = 0$, то есть расположена горизонтально. Касательная к графику функции, проведенная в точке с абсциссой x_0, в силу параллельности с данной прямой горизонтальна. Прикладываем линейку на рисунке горизонтально и перемещаем снизу вверх, находим точки на графике с горизонтальной касательной. Всего их семь.

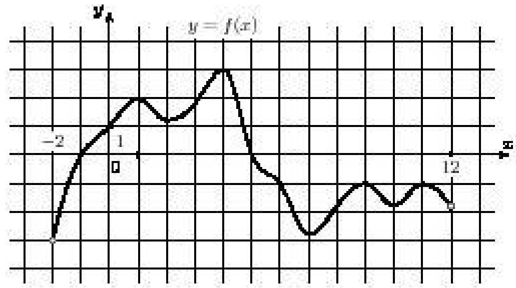


б) В окрестности абсцисс точек касания функция принимает самое большое (максимум) или самое малое (минимум) значение. Выпишем абсциссы полученных точек касания: –3; –2; –1; 0; 1; 5; 6. Найдем их сумму: $-3+(-2)+(-1)+0+1+5+6=6$.

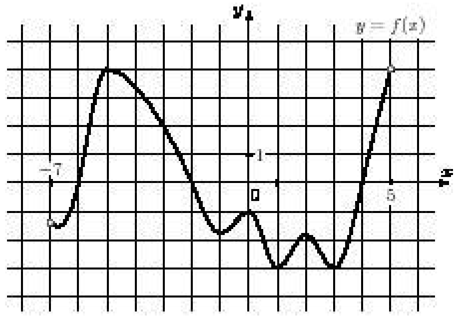
Ответ: **а)** 7; **б)** 6.

***

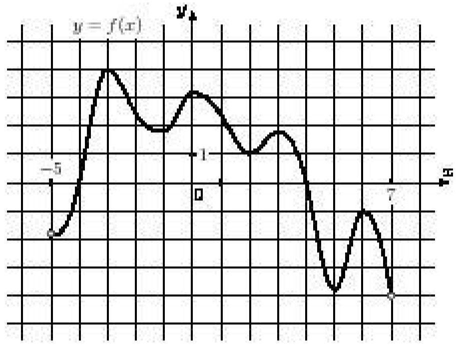
3.7.1.(прототип 27490) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-2;12)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



3.7.2.(7329) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-7;5)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

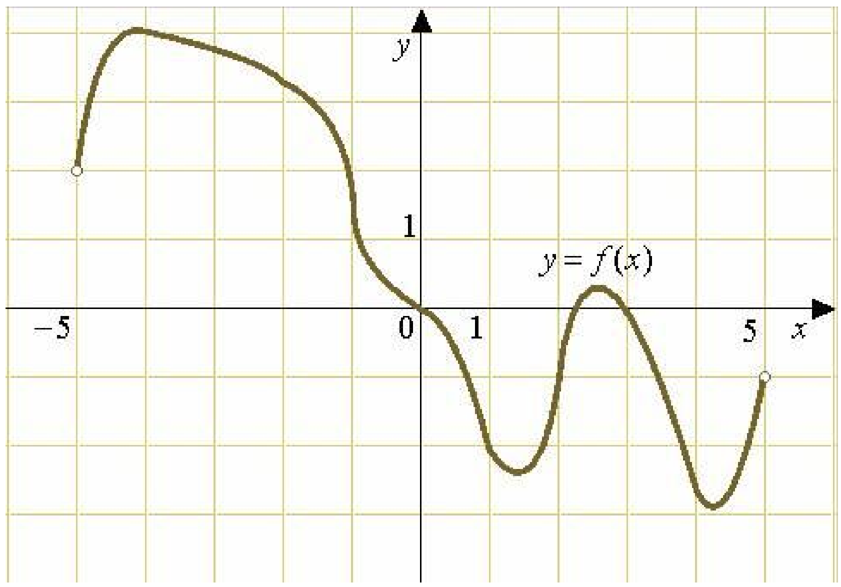


3.7.3.(7549) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5;7)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

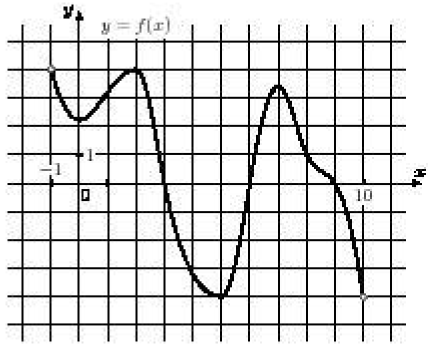


***

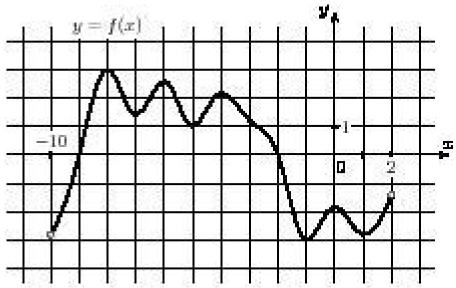
3.8.1.(прототип 119971) На рисунке изображен график функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5;5)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



3.8.2.(119981) На рисунке изображен график функции $f(x)$, определенной на интервале $(-1;10)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



3.8.3.(120213) На рисунке изображен график функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10;2)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.

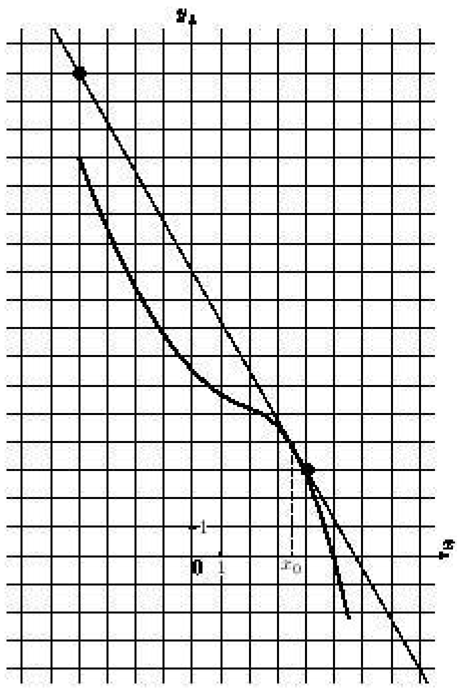


Касательная к графику функции

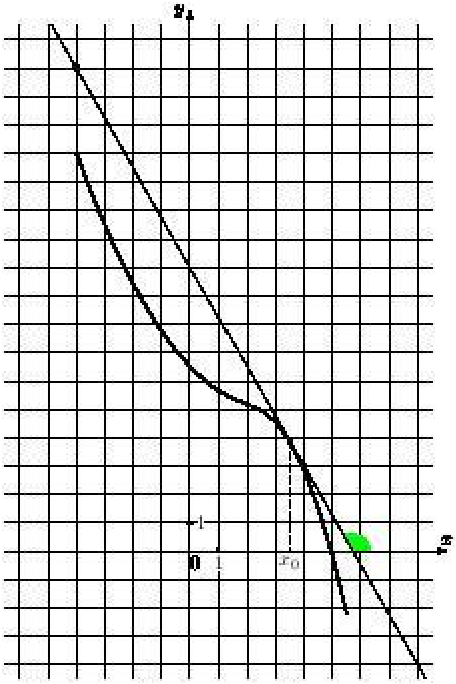
● Если известно, что прямая $y = kx + b$ проходит через точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, то ее угловой коэффициент k можно вычислить по формуле $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

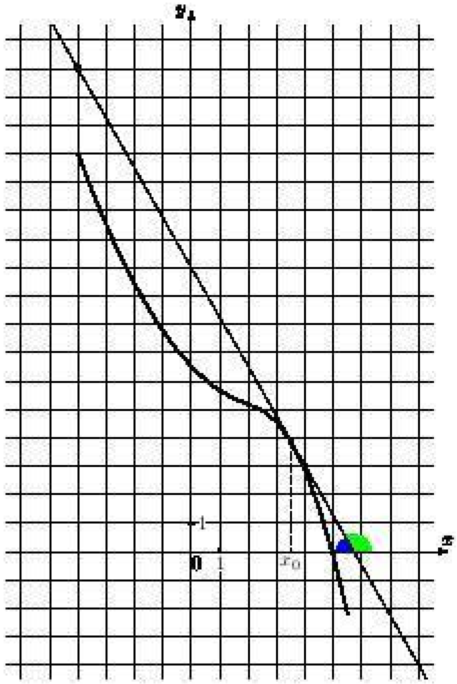
● Тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к прилежащему катету.

Пример 5. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



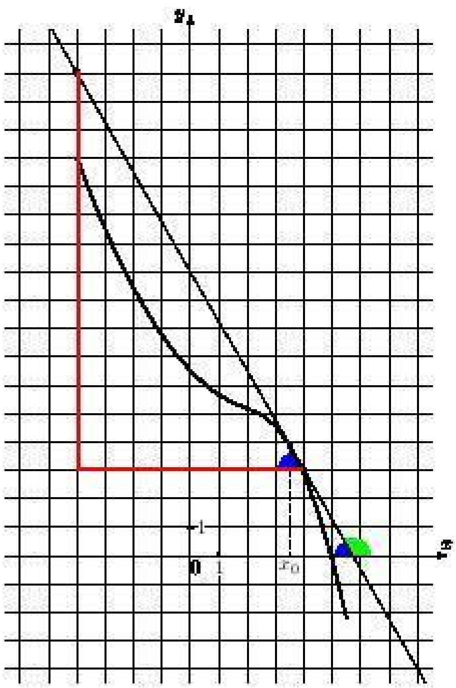
Решение. 1-й способ. Отмечаем угол наклона касательной с положительным направлением оси Ox. Так как угол тупой (выделен зеленым цветом), то сразу ставим знак "минус" в ответ.





К полученному тупому углу отмечаем смежный острый угол (выделен синим цветом).

Построим прямоугольный треугольник, используя выделенные точки (–4;17) и (4;3) на касательной. Отмечаем в нем угол (выделен синим цветом), равный отмеченному острому углу.



Тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен $\frac{14}{8}=1,75$. Следовательно, тангенс угла наклона касательной (выделен зеленым цветом) $\mathrm{tg}\,\alpha=-1,75$. Так как $f'(x_0)=\mathrm{tg}\,\alpha$, то искомое значение производной равно –1,75.

2-й способ. Подставим целочисленные координаты $(-4;17)$ и $(4;3)$ выделенных точек на касательной в уравнение прямой $y=kx+b$. Составим систему двух уравнений с двумя неизвестными k и b:

$$\begin{cases} 17=-4k+b, \\ 3=4k+b. \end{cases}$$

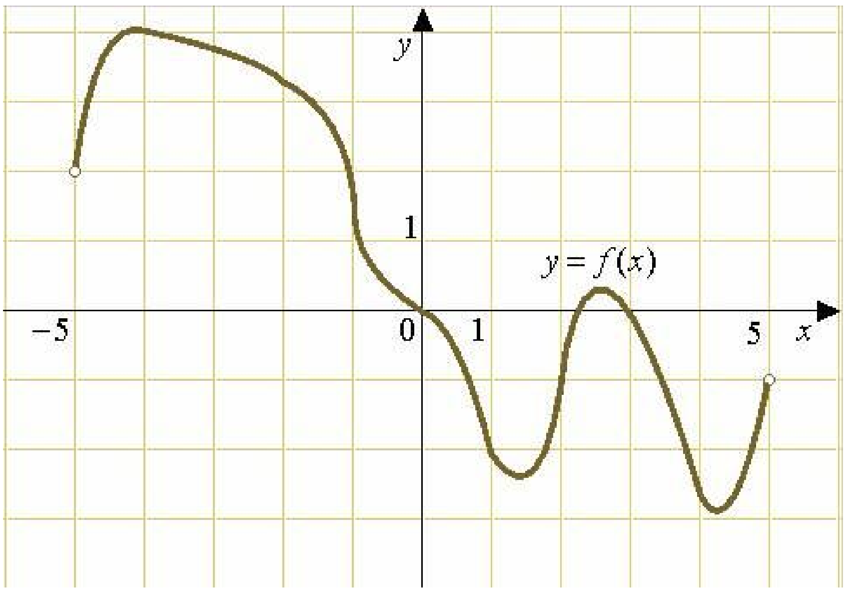
Вычтем из первого уравнения системы второе уравнение, получим $14=-8k$. Тогда $k=-1,75$ и $b=10$. Так как $f'(x_0)=k$, то получаем искомое значение производной функции $f'(x_0)=-1,75$.

3-й способ. Найдем угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в точке x_0. Эта касательная проходит через точки $(-4;17)$ и $(4;3)$. Ее угловой коэффициент $k=\frac{3-17}{4-(-4)}=\frac{-14}{8}=-1,75$. Так как $f'(x_0)=k$, то значение производной функции в точке x_0 также равно –1,75.

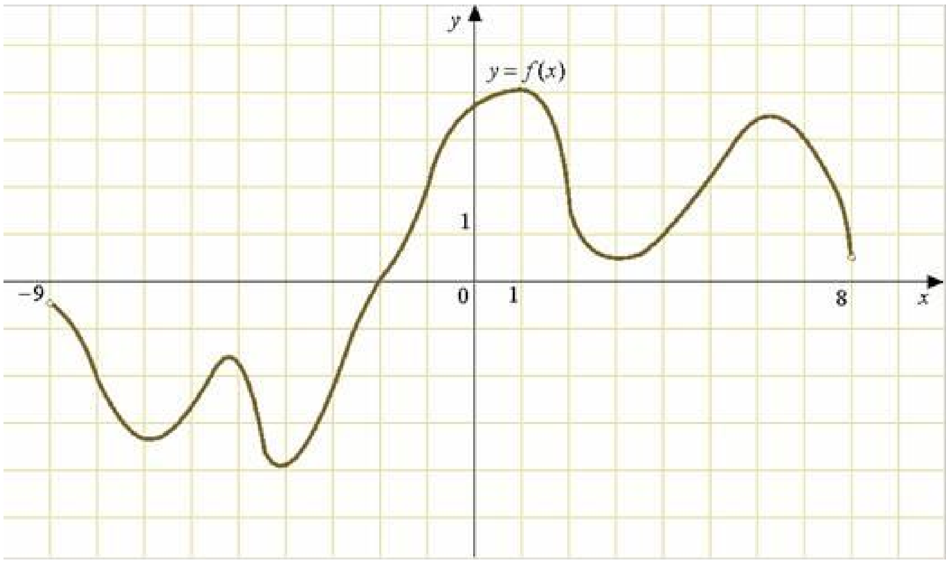
Ответ: –1,75.

***

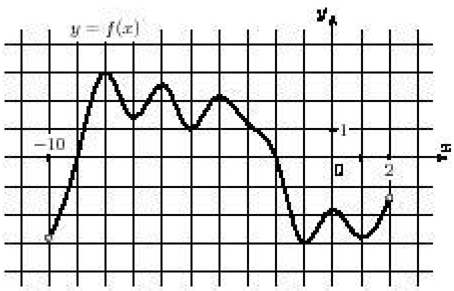
3.9.1.(прототип 27489) На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-5;5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y=6$ или совпадает с ней.



3.9.2.(6401) На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-9;8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y=10$.

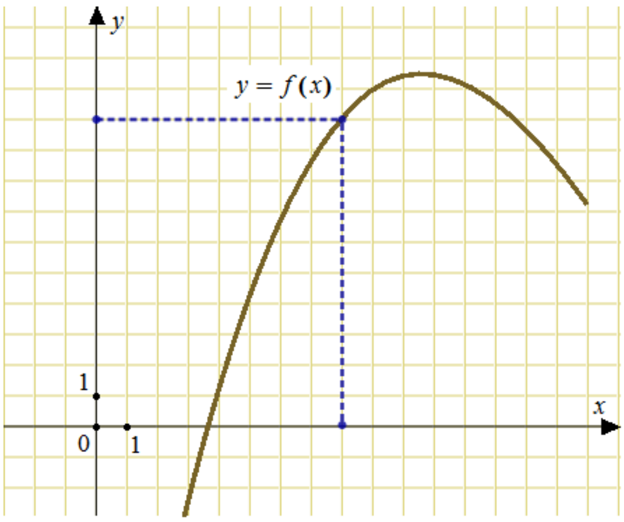


3.9.3.(7323) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-10; 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -6$.

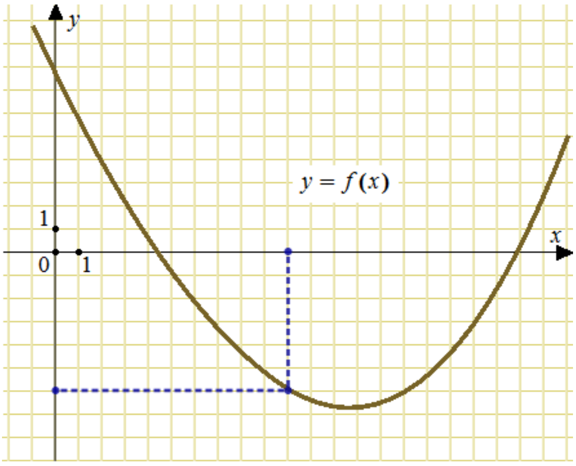


***

3.10.1.(прототип 40129) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 8. Найдите значение производной функции в точке $x_0 = 8$.

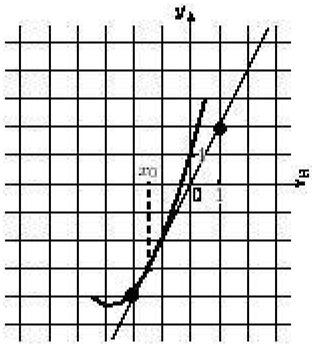


3.10.2.(54801) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 10. Найдите значение производной функции в точке $x_0 = 10$.

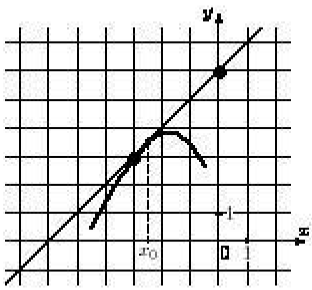


***

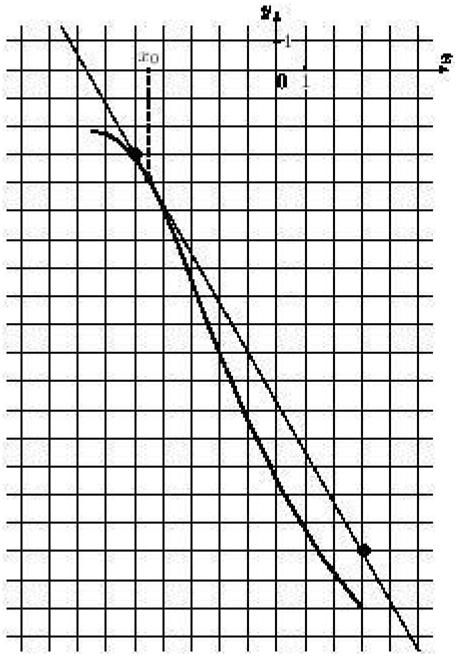
3.11.1.(прототип 27503) На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



3.11.2.(9063) На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

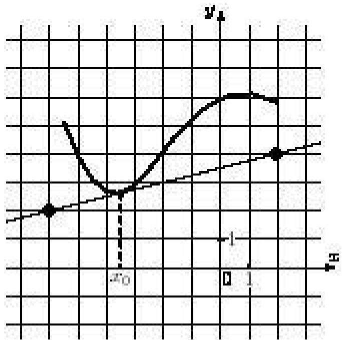


3.11.3.(9641) На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

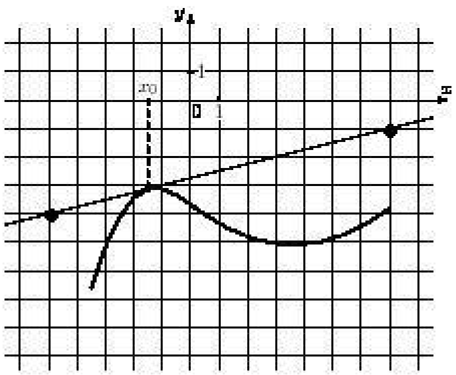


***

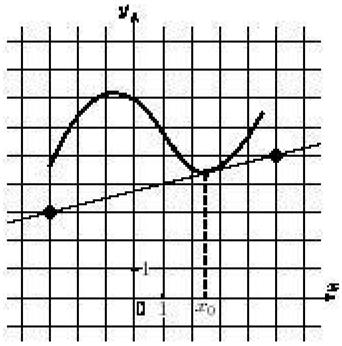
3.12.1.(прототип 27504) На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



3.12.2.(9061) На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

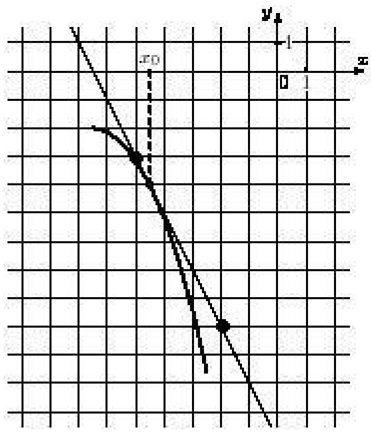


3.12.3.(9649) На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

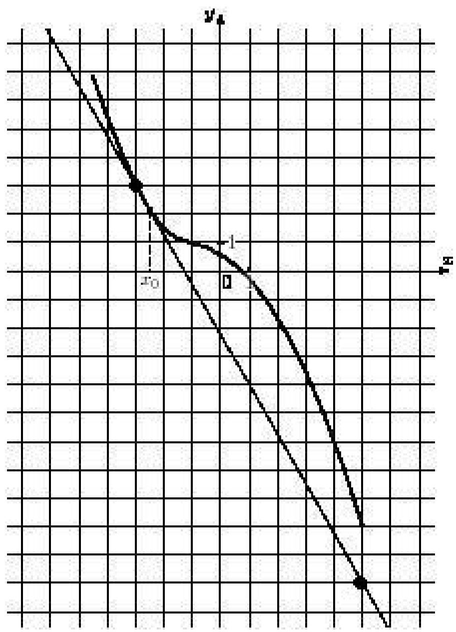


***

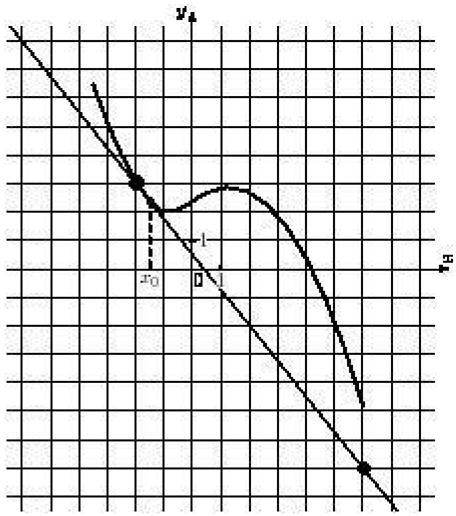
3.13.1.(прототип 27505) На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



3.13.2.(9127) На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

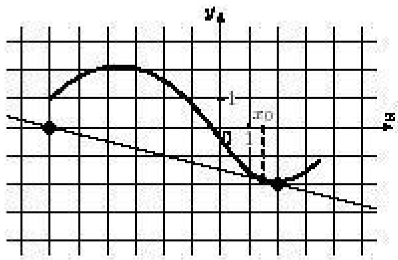


3.13.3.(9603) На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

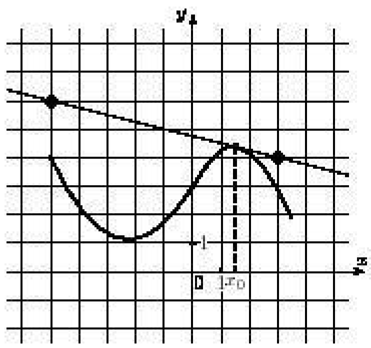


***

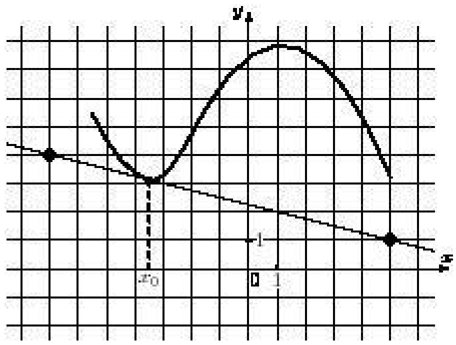
3.14.1.(прототип 27506) На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



3.14.2.(9059) На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



3.14.3.(9635) На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



4. График производной функции

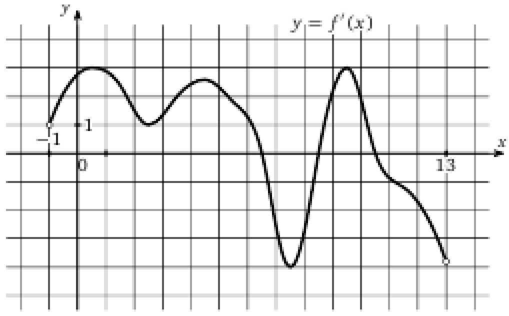
В данном разделе рассмотрим задачи, в которых по графику производной функции необходимо ответить на вопросы о свойствах данной функции.

Промежутки монотонности функции

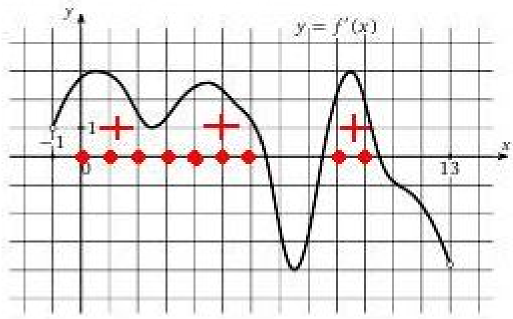
• *Достаточное условие возрастания функции*: если в каждой точке интервала $(a;b)$ производная $f'(x)>0$, то функция $f(x)$ монотонно возрастает на этом интервале.

• *Достаточное условие убывания функции*: если в каждой точке интервала $(a;b)$ производная $f'(x)<0$, то функция $f(x)$ монотонно убывает на этом интервале.

Пример 6. На рисунке изображен график $y=f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-1;13)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



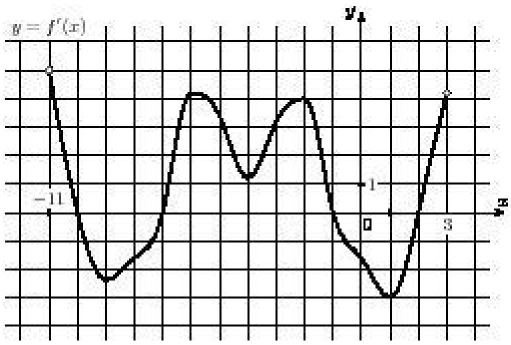
Решение. На двух интервалах $(-1;6,5)$ и $(8,5;10,5)$ производная $f'(x)>0$, поэтому на каждом из этих интервалах функция $f(x)$ возрастает. Выпишем целые числа, принадлежащие этим промежуткам: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 9; 10. Искомая сумма равна $0+1+2+3+4+5+6+9+10=40$.



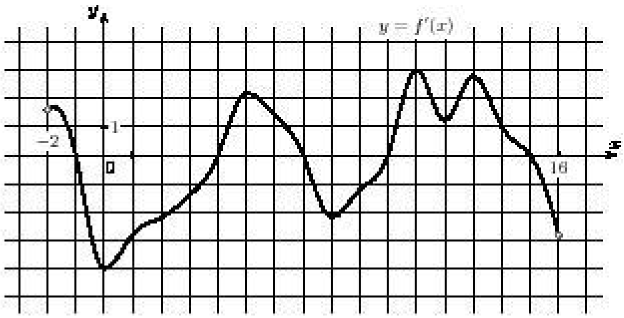
Ответ: 40.

***

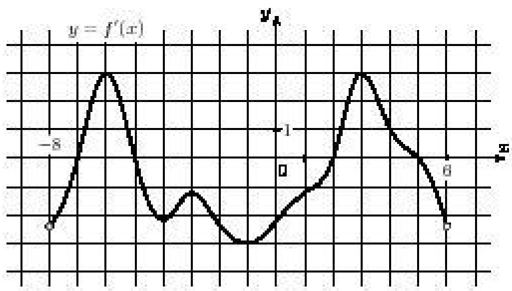
4.1.1.(прототип 27499) На рисунке изображен график $y=f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11;3)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



4.1.2.(8327) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2;16)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

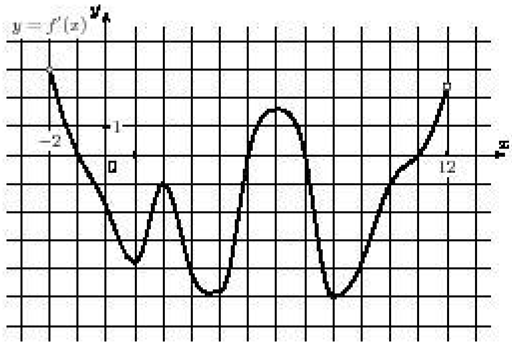


4.1.3.(8545) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;6)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

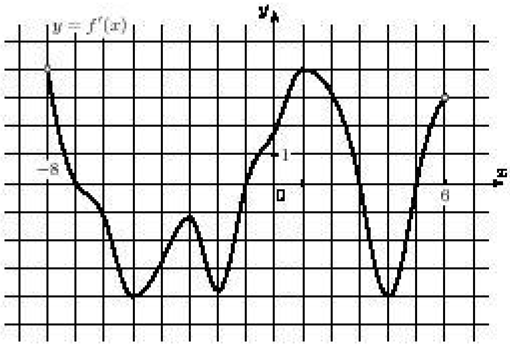


***

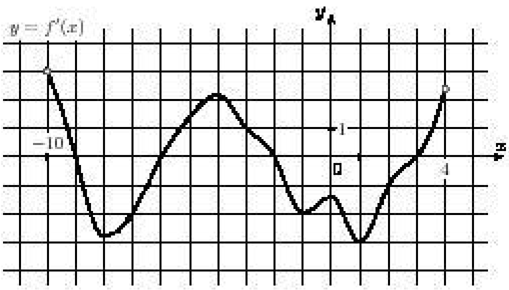
4.2.1.(прототип 27500) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2;12)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



4.2.2.(8331) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;6)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

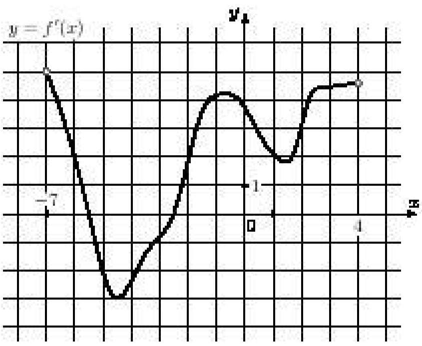


4.2.3.(8549) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10;4)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

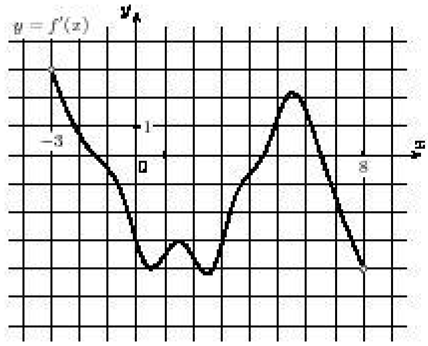


***

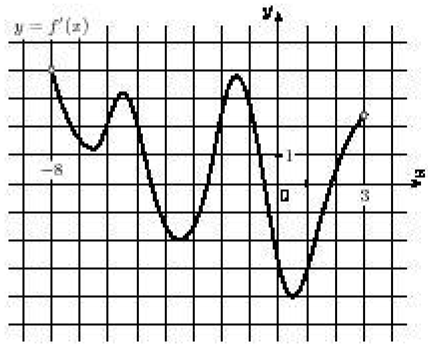
4.3.1.(прототип 27497) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7;4)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



4.3.2.(8061) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3;8)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



4.3.3.(8299) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;3)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

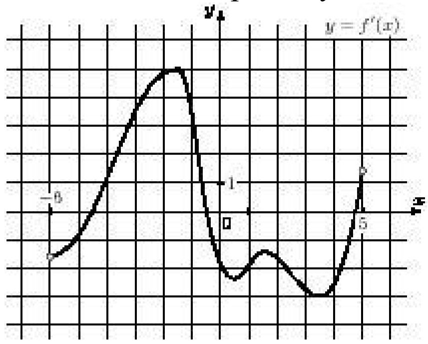


***

4.4.1.(прототип 27498) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5;7)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

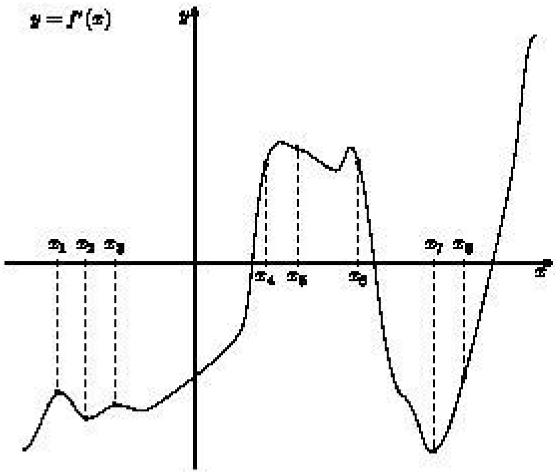
4.4.2.(8057) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9;2)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

4.4.3.(8297) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6;5)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

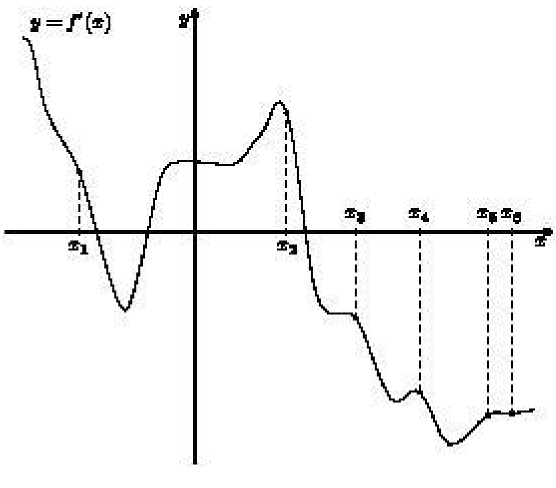


***

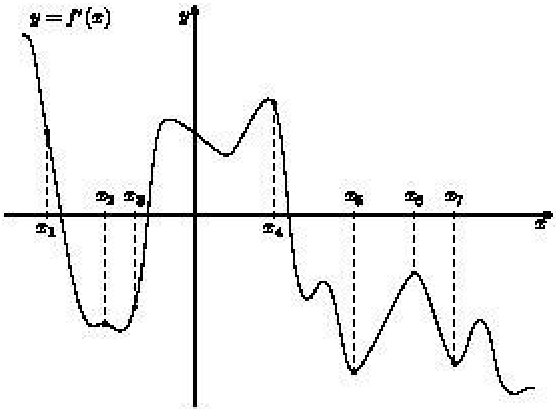
4.5.1.(прототип 317541) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, ..., x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



4.5.2.(317745) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и шесть точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, ..., x_6$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?

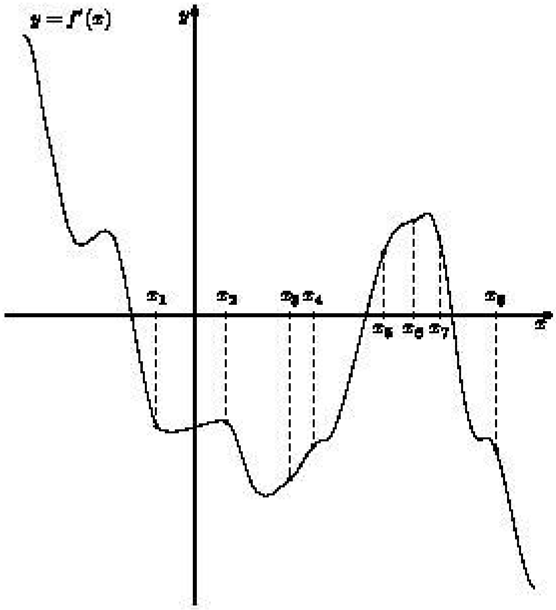


4.5.3.(317843) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, ..., x_7$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?

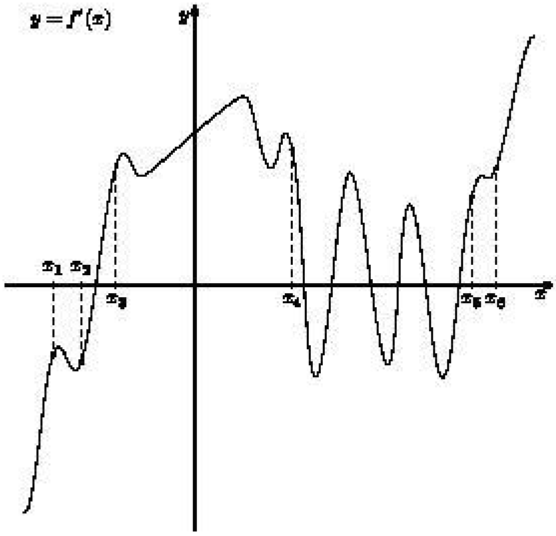


***

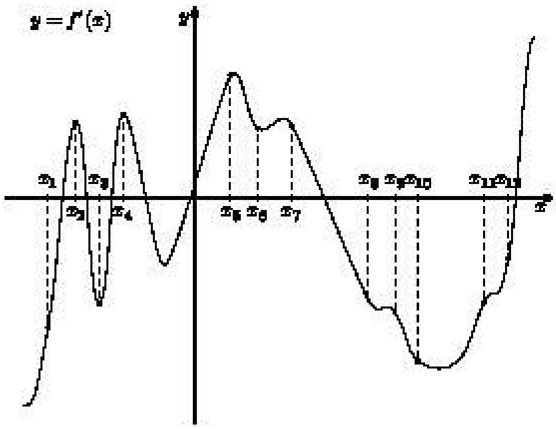
4.6.1.(прототип 317542) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, ..., x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?



4.6.2.(317847) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и шесть точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, ..., x_6$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?



4.6.3.(317935) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, ..., x_{12}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?



Точки экстремума функции

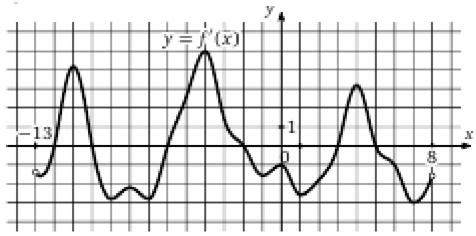
Достаточное условие экстремума функции. Если в некоторой точке x_0 производная функции $f(x)$ обращается в нуль и, кроме того, проходя через нее слева направо, меняет свой знак, то в этой точке функция достигает экстремума. Если производная меняет знак с «+» на «–», то x_0 – точка максимума функции $f(x)$. Если производная меняет знак с «–» на «+», то x_0 – точка минимума $f(x)$.

Поведение функции при ее исследовании с помощью производной проиллюстрируем таблицами.

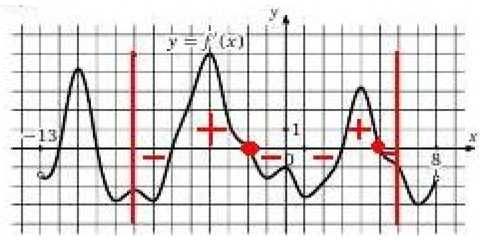
$(a;b)$	$(a;x_0)$	x_0	$(x_0;b)$
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	возрастает	$f_{\max}(x) = f(x_0)$	убывает

$(a;b)$	$(a;x_0)$	x_0	$(x_0;b)$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	убывает	$f_{\min}(x) = f(x_0)$	возрастает

Пример 7. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-13;8)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-8;6]$.



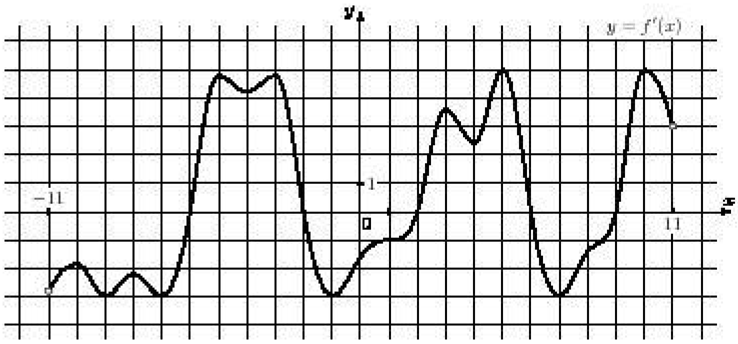
Решение. На отрезке $[-8;6]$ производная обращается в нуль в точках –6, –2, 3 и 5, причем при переходе через точки –2 и 5 слева направо меняет знак с «+» на «–». Следовательно, на данном отрезке две точки максимума функции $f(x)$.



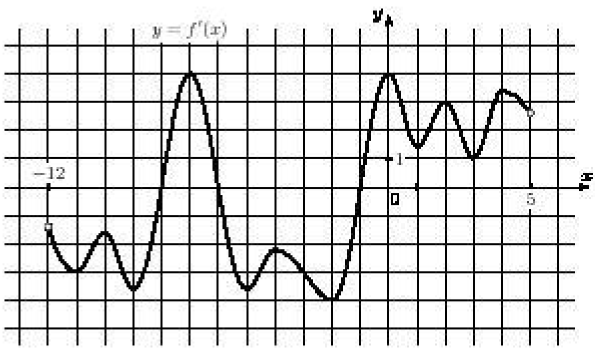
Ответ: 2.

***

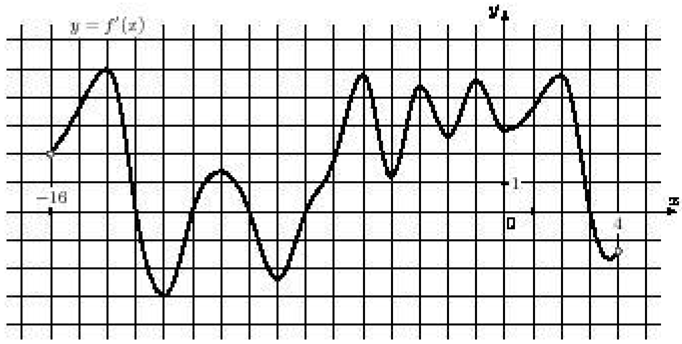
4.7.1.(прототип 27496) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11;11)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-10;10]$.



4.7.2.(7811) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-12;5)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-10;0]$.

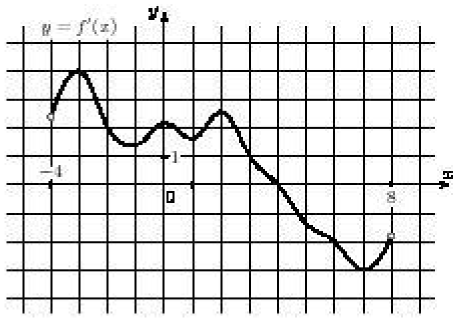


4.7.3.(8047) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-16;4)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-14;2]$.

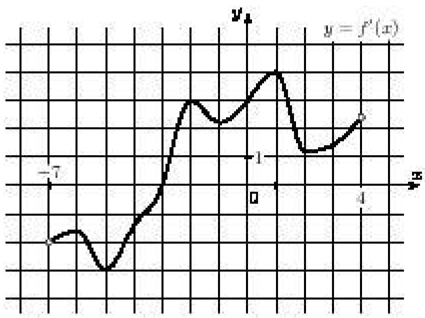


***

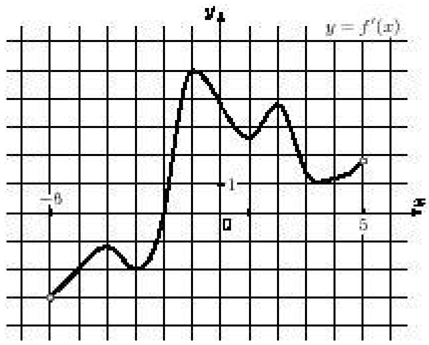
4.8.1.(прототип 27502) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4;8)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-2;6]$.



4.8.2.(8807) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7;4)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-6;1]$.

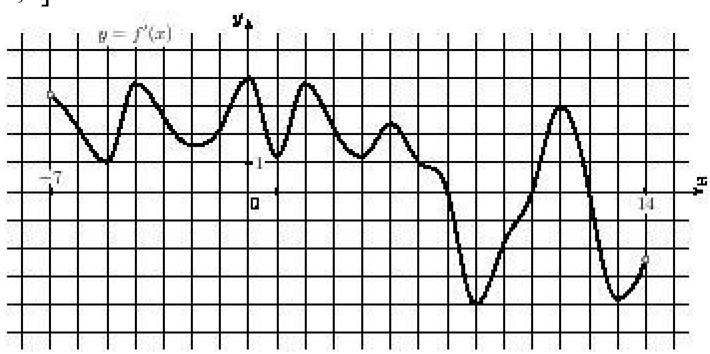


4.8.3.(9049) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6;5)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-5;4]$.

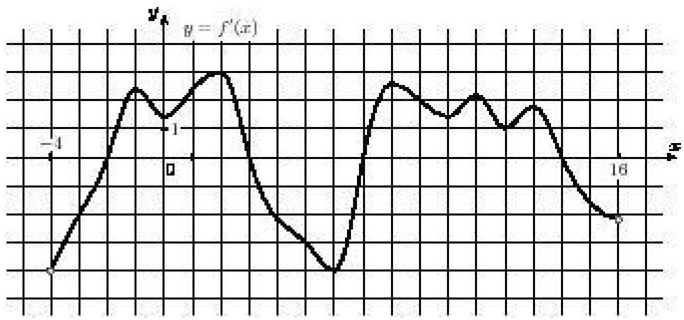


***

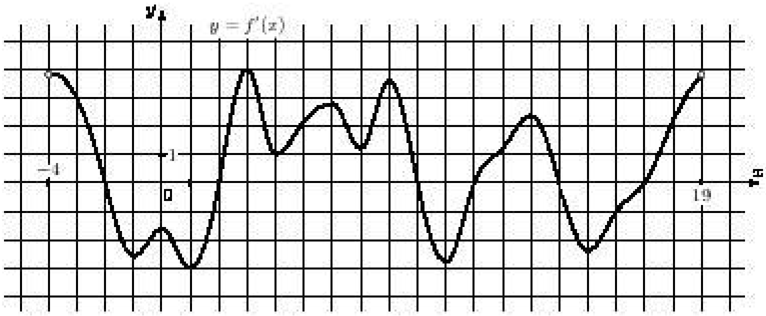
4.9.1.(прототип 27494) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7;14)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-6;9]$.



4.9.2.(7807) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4;16)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[0;13]$.

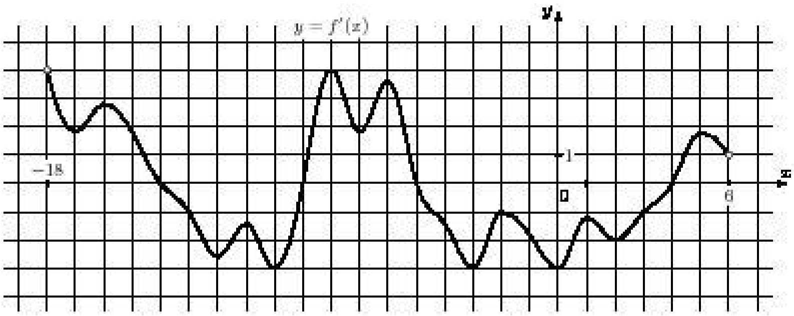


4.9.3.(8041) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4;19)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-3;18]$.

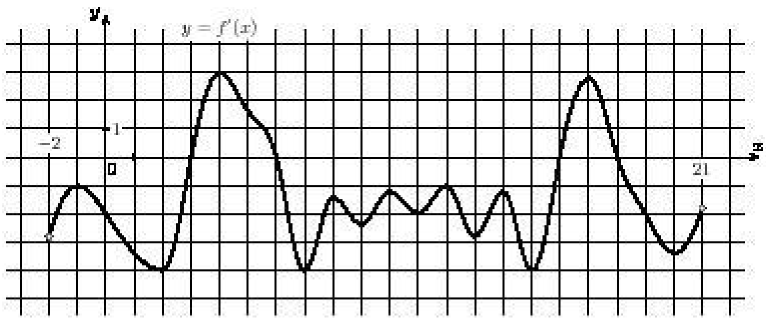


***

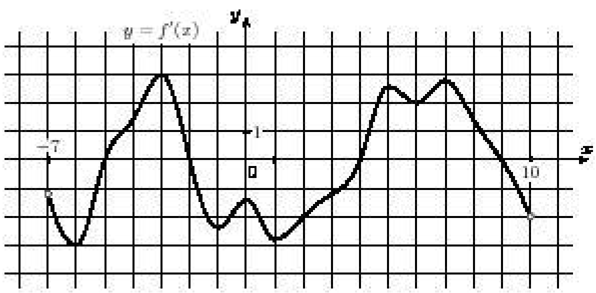
4.10.1.(прототип 27495) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-18;6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-13;1]$.



4.10.2.(7809) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2;21)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[2;19]$.



4.10.3.(8049) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7;10)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-3;8]$.



Наибольшее и наименьшее значения функции

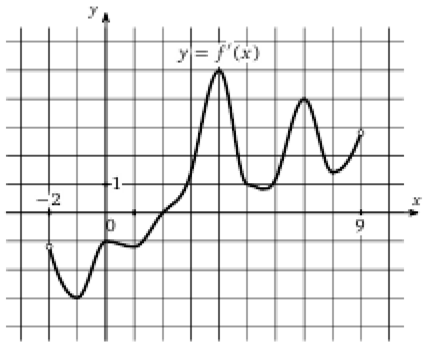
- При нахождении наибольшего и наименьшего значений функции бывает полезно применять следующие утверждения:

1. Если непрерывная функция возрастает на отрезке, то она принимает наибольшее значение на правом конце отрезка, а наименьшее – на левом.

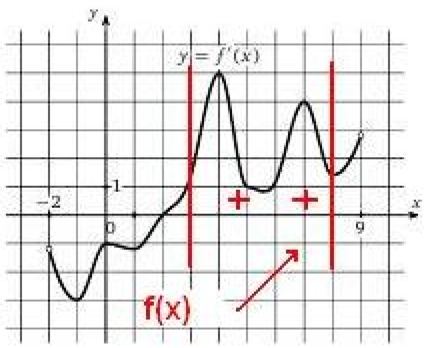
2. Если непрерывная функция убывает на отрезке, то она принимает наибольшее значение на левом конце отрезка, а наименьшее – на правом.

3. Если функция непрерывна на интервале $(a;b)$ и имеет на этом интервале единственный экстремум (максимум или минимум), то этот экстремум есть соответственно наибольшее или наименьшее значение функции на интервале $(a;b)$.

Пример 8. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2;9)$. В какой точке отрезка $[3;8]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

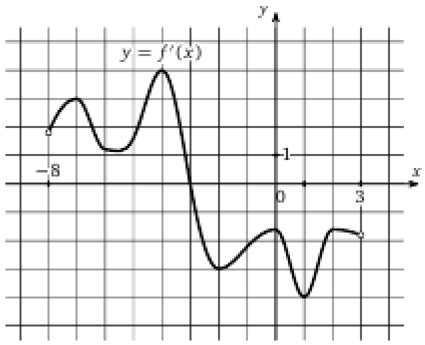


Решение. Как видно из рисунка, на данном отрезке производная функции положительна, следовательно, функция $f(x)$ возрастает на этом отрезке. Отсюда получаем, что функция $f(x)$ принимает наименьшее значение в левой точке отрезка $[3;8]$, то есть в точке 3.

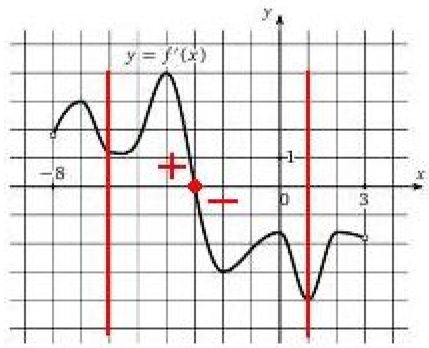


Ответ: 3.

Пример 9. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;3)$. В какой точке отрезка $[-6;1]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение.



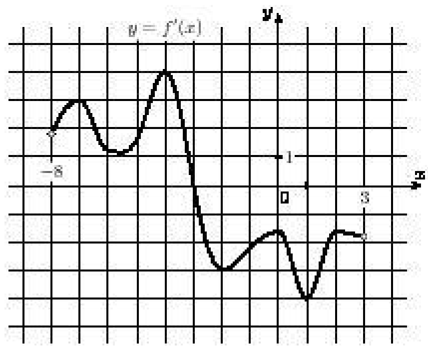
Решение. На отрезке $\left[-6;1\right]$ производная один раз обращается в нуль в точке –3 и при переходе через эту точку слева направо меняет знак с «+» на «–». Следовательно, на данном отрезке функция $f(x)$ имеет единственный экстремум (максимум) и принимает наибольшее значение на данном отрезке в точке –3.



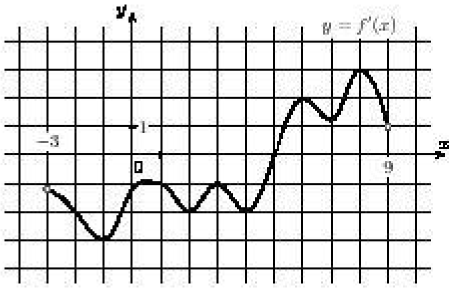
Ответ: –3.

***

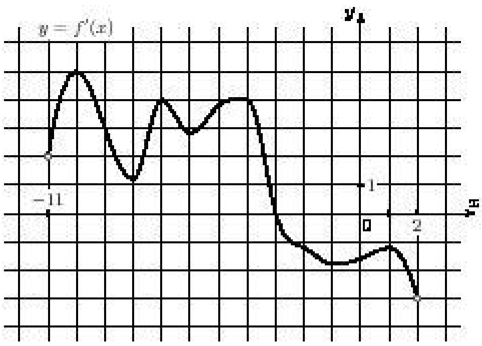
4.11.1.(прототип 27491) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;3)$. В какой точке отрезка $\left[-3;2\right]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение.



4.11.2.(7567) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3;9)$. В какой точке отрезка $\left[-2;2\right]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?

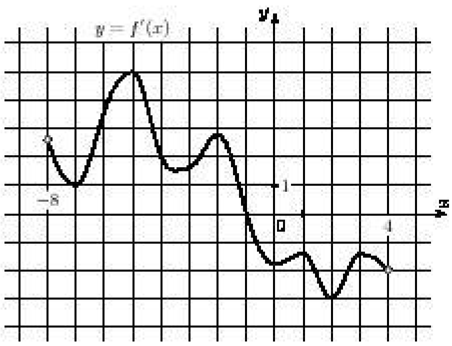


4.11.3.(7799) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11;2)$. В какой точке отрезка $[-9;-5]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?

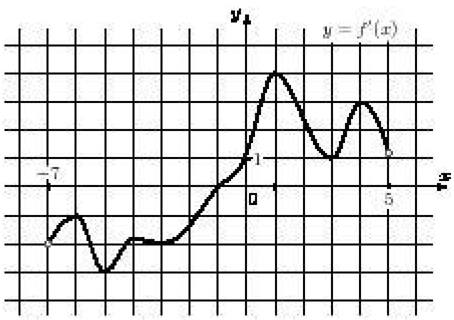


***

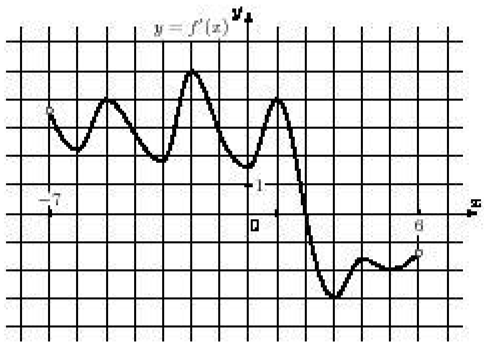
4.12.1.(прототип 27492) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;4)$. В какой точке отрезка $[-7;-3]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение.



4.12.2.(7559) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7;5)$. В какой точке отрезка $[-6;-1]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение.



4.12.3.(7795) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7;6)$. В какой точке отрезка $[-5;-1]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



<u>Касательная к графику функции</u>

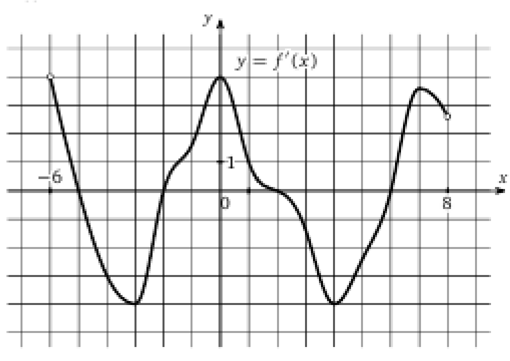
● Уравнение касательной (прямой) имеет вид $y = kx + b$, где k – угловой коэффициент.

● Значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой x_0:

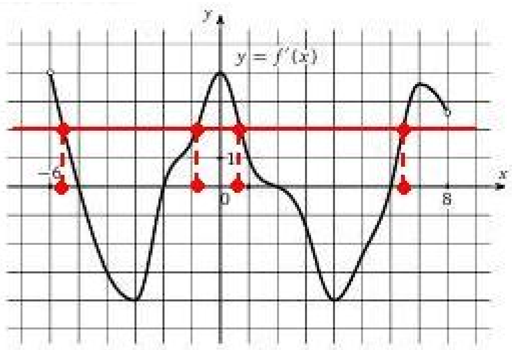
$$f'(x_0) = k.$$

Если производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна нулю, то касательная, проведенная к графику этой функции в точке с абсциссой x_0, параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

Пример 10. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6;8)$. Найдите количество таких чисел x_i, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_i параллельна прямой $y = 2x - 5$ или совпадает с ней.



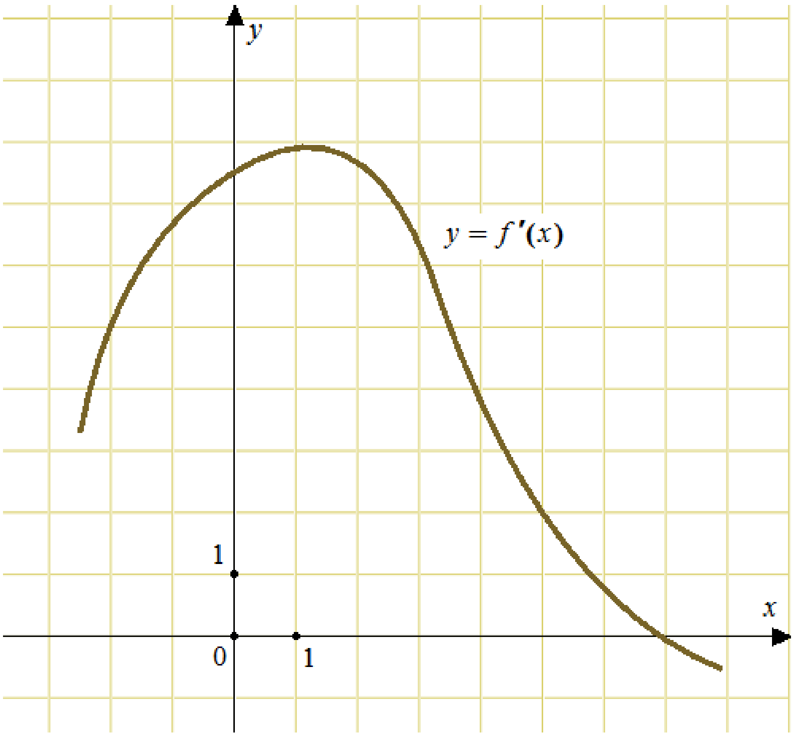
Решение. Касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 5$ или совпадает с ней, поэтому ее угловой коэффициент равен 2. Так как значение производной равно $f'(x_0) = k$, то есть $f'(x_0) = 2$, то на данном рисунке графика производной функции $y = f'(x)$ проведем прямую $y = 2$. Количество общих точек прямой $y = 2$ и графика производной функции $y = f'(x)$ равно 4. Значит, и количество абсцисс x_i, соответствующих этим точкам, равно 4.



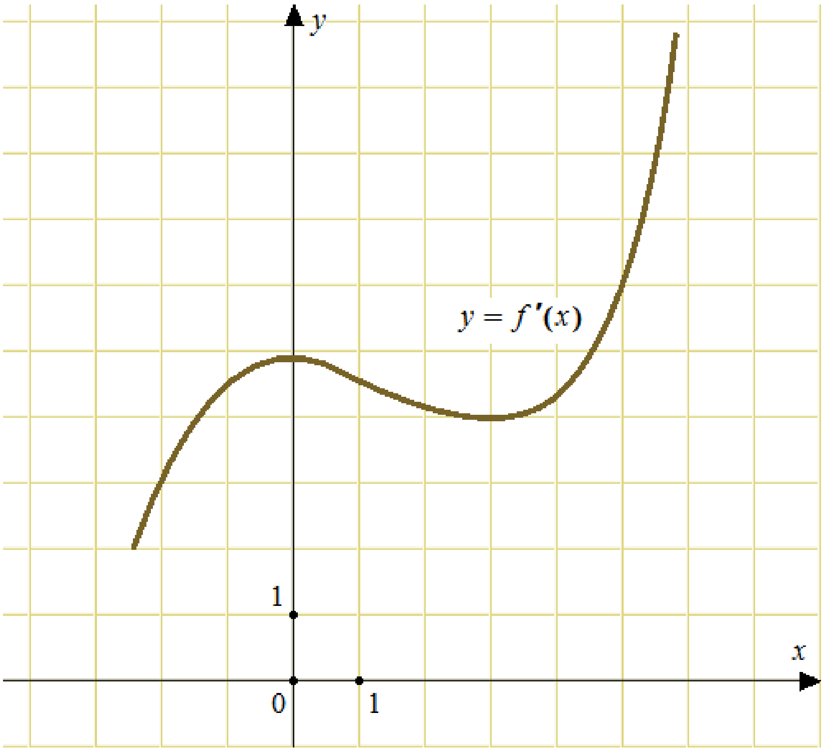
Ответ: 4.

***

4.13.1.(прототип 40130) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 2$ или совпадает с ней.

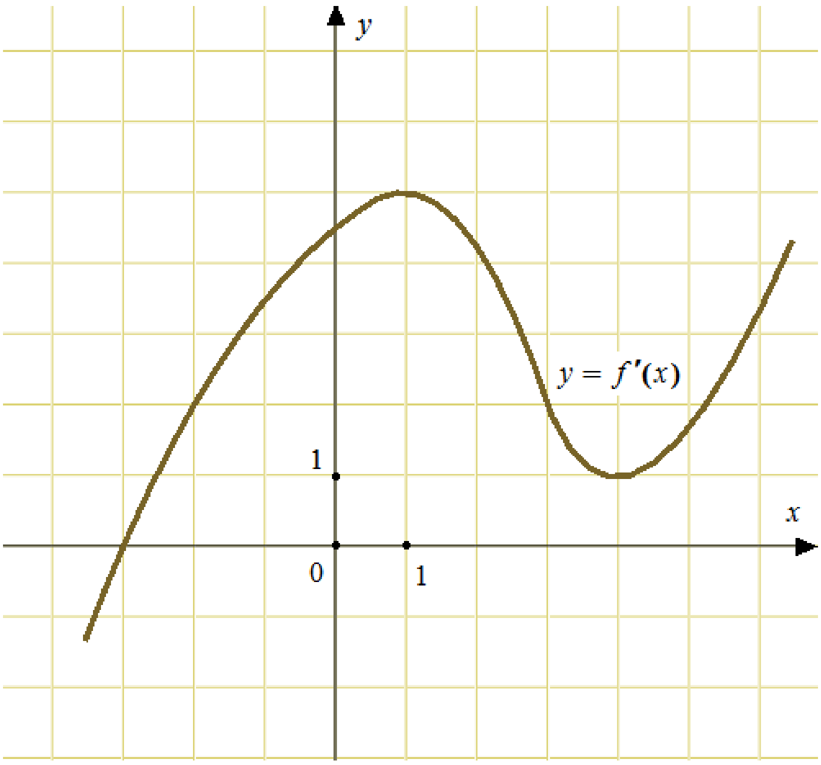


4.13.2.(54803) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 6x$ или совпадает с ней.



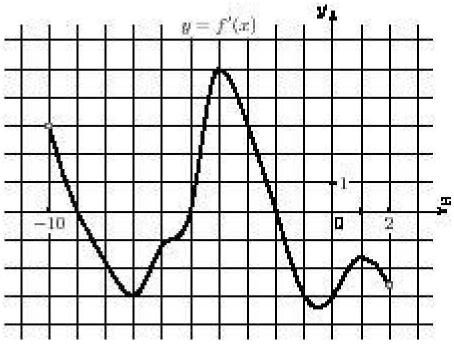
***

4.14.1.(прототип 40131) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

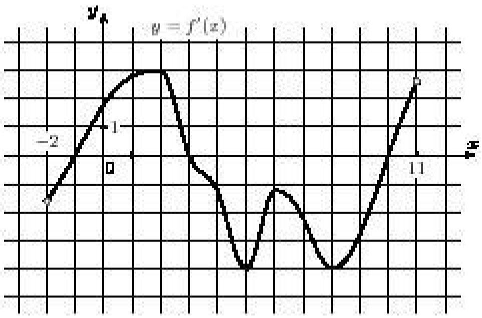


***

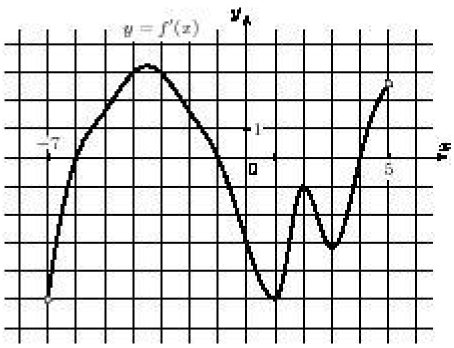
4.15.1.(прототип 27501) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10;2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=-2x-11$ или совпадает с ней.



4.15.2.(8561) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2;11)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = x-20$ или совпадает с ней.



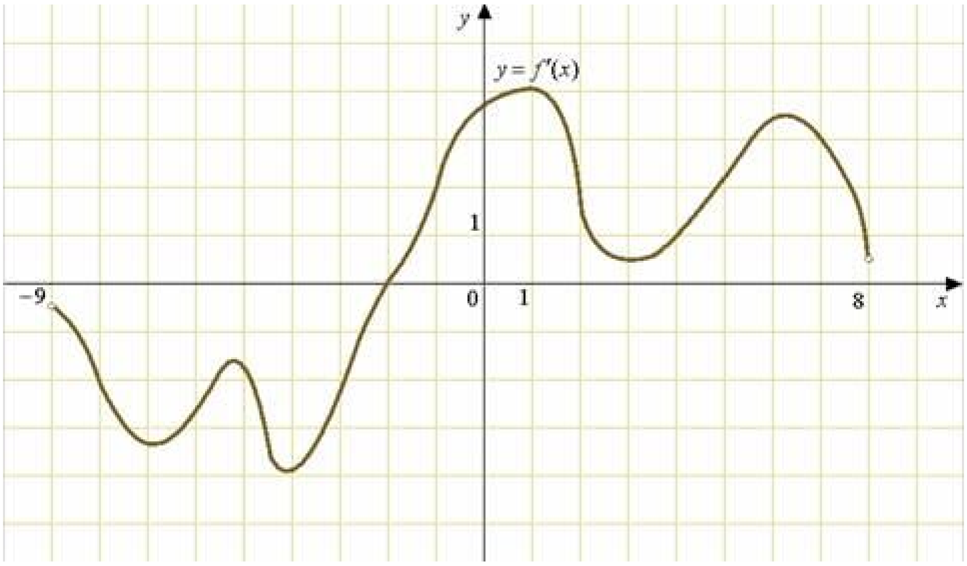
4.15.3.(8797) На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7;5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=-3x-9$ или совпадает с ней.



<u>Серия задач на одном графике</u>

***

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9;8)$.



4.16.1.(6403) В какой точке отрезка $[-8;-4]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение.

4.16.2.(6405) В какой точке отрезка $[1;7]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение.

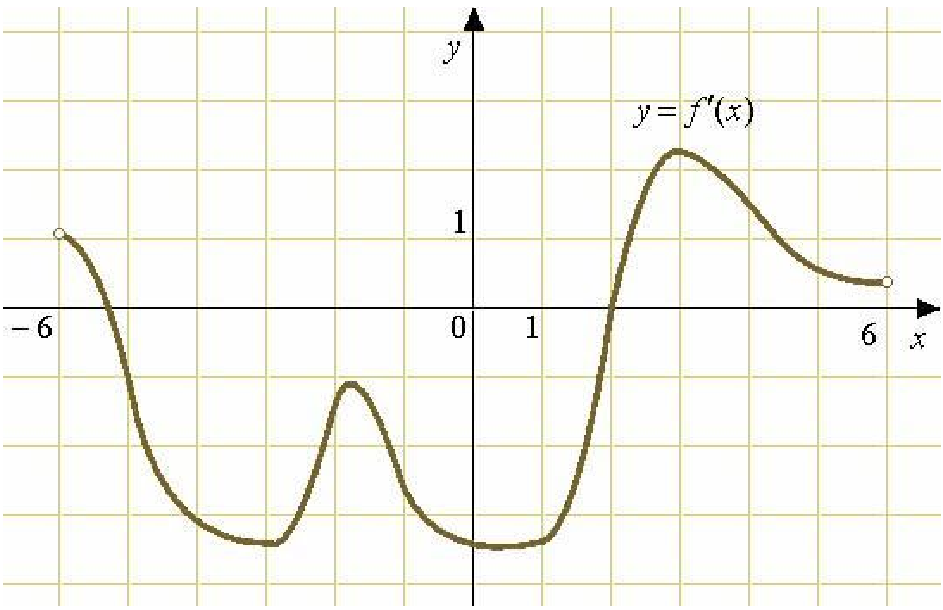
4.16.3.(6407) Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = x - 7$ или совпадает с ней.

4.16.4.(6409) Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -x + 8$ или совпадает с ней.

4.16.5.(6411) В какой точке отрезка $[-5;3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение.

***

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6;6)$.



4.17.1.(6413) В какой точке отрезка $[-5;-1]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение.

4.17.2.(6415) В какой точке отрезка $[3;5]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение.

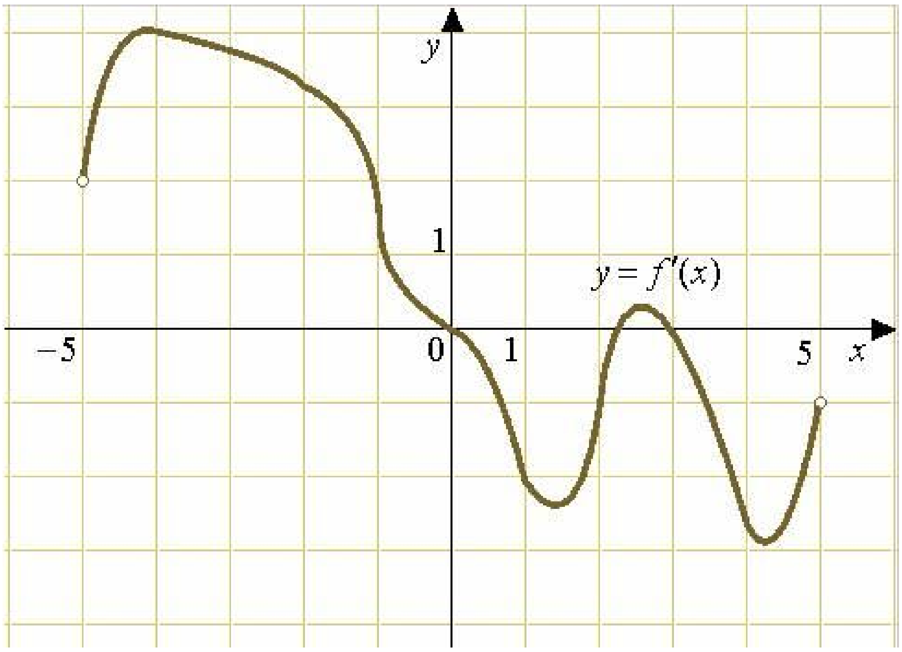
4.17.3.(6417) Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на интервале (–4;5).

4.17.4.(6419) Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=-3x-11$ или совпадает с ней.

4.17.5.(6429) Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

***

На рисунке изображен график $y=f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5;5)$.



4.18.1.(6425) В какой точке отрезка $[-4;-1]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение.

4.18.2.(6427) Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-4;4]$.

4.18.3.(6431) Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

4.18.4.(6433) Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=-0,5x+9$ или совпадает с ней.

4.18.5.(6435) Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=-2x+2$ или совпадает с ней.

5. Первообразная функции

• Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на данном промежутке, если для любого x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

• Совокупность всех первообразных данной функции $f(x)$ называется ее *неопределенным интегралом* и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Таблица интегралов

$$\int 0 \cdot dx = C$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

Правила интегрирования

$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$, где c – постоянная

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

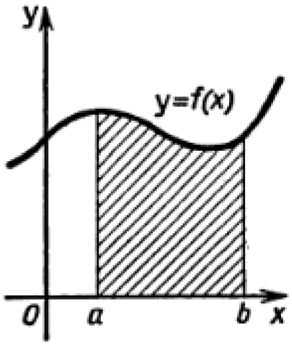
Формула Ньютона-Лейбница

Для непрерывной функции $y = f(x)$

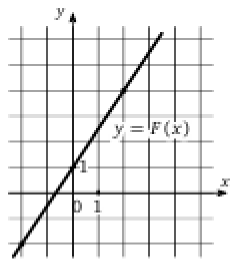
$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Геометрический смысл определенного интеграла

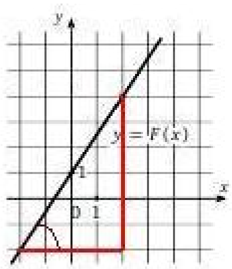
Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке $[a;b]$ функции $f(x)$, осью x и прямыми $x = a$ и $x = b$, равна $S = \int\limits_a^b f(x)dx$.



Пример 11. Прямая, изображенная на рисунке, является графиком одной из первообразных функции $y = f(x)$. Найдите $f(2)$.

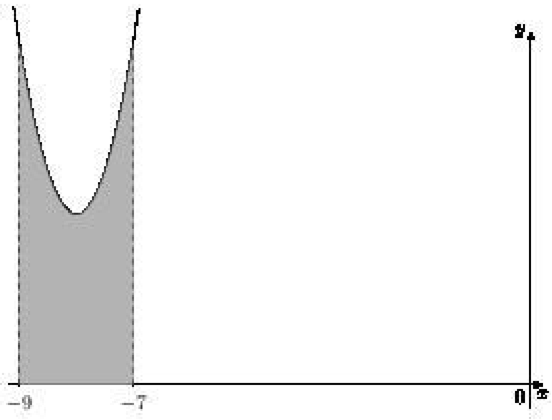


Решение. По определению первообразной $F'(x) = f(x)$, значит, $f(2) = F'(2)$. Графиком первообразной является прямая, поэтому значение производной функции $F(x)$ равно тангенсу угла наклона прямой с положительным направлением оси абсцисс. Используя выделенные точки на прямой, построим прямоугольный треугольник. Из прямоугольного треугольника найдем значение тангенса острого угла $\operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{4} = 1,5$. Следовательно, $f(2) = 1,5$.



Ответ: 1,5.

Пример 12. На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 + 24x^2 + 195x - \frac{3}{4}$ – одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Решение. 1-й способ. Воспользуемся формулой $S = F(b) - F(a)$. Тогда имеем

$$S = F(-7) - F(-9) = (-7)^3 + 24(-7)^2 + 195(-7) - \frac{3}{4} - \left((-9)^3 + 24(-9)^2 + 195(-9) - \frac{3}{4}\right) =$$

$$= -343 + 729 + 24(49 - 81) + 195(-7 + 9) = 386 - 768 + 390 = 8.$$

2-й способ. Воспользуемся схемой Горнера для вычисления $F(-7)$ и $F(-9)$.

	1	**24**	**195**	**–3/4**
–7	1	17	76	–532–3/4
–9	1	15	60	–540–3/4

Тогда $S = \left(-532 - \frac{3}{4}\right) - \left(-540 - \frac{3}{4}\right) = 8$.

3-й способ. Площадь закрашенной фигуры $S = \int\limits_{-9}^{-7} f(x)dx$, где

$$f(x) = F'(x) = 3x^2 + 48x + 195 = 3(x+8)^2 + 3.$$

Найдем эту площадь $S = \int\limits_{-9}^{-7} \left(3(x+8)^2 + 3\right)dx$.

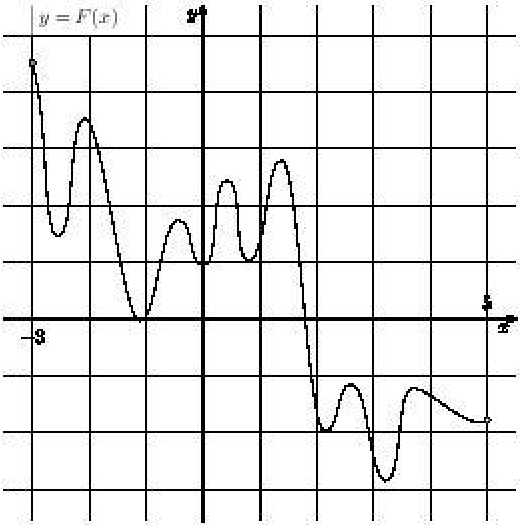
Заменим переменную интегрирования. Пусть $x + 8 = t$, $x = t - 8$, $dx = dt$, тогда $t = -1$ при $x = -9$ и $t = 1$ при $x = -7$. Формула для вычисления площади примет вид

$$S = \int\limits_{-1}^{1} \left(3t^2 + 3\right)dt = 2\int\limits_{0}^{1} \left(3t^2 + 3\right)dt = 2\left(t^3 + 3t\right)\Big|_0^1 = 2(1+3) = 8.$$

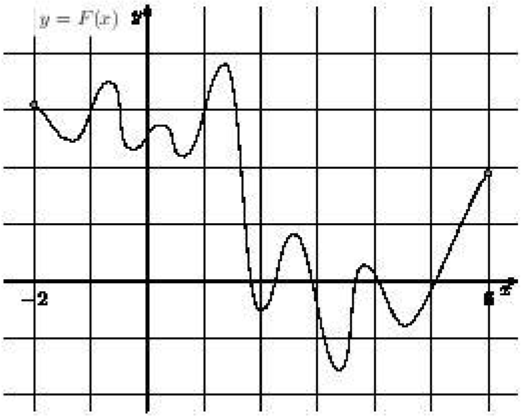
Ответ: 8.

***

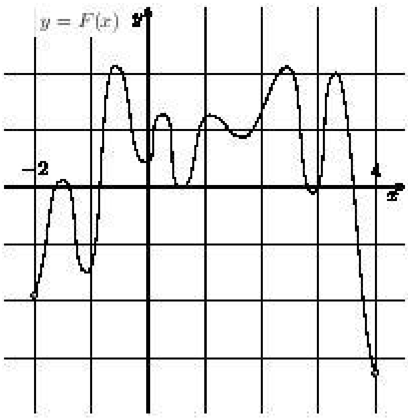
5.1.1.(прототип 323077) На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ – одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале (–3;5). Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2;4]$.



5.1.2.(323081) На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ – одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале (–2;6). Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-1;5]$.

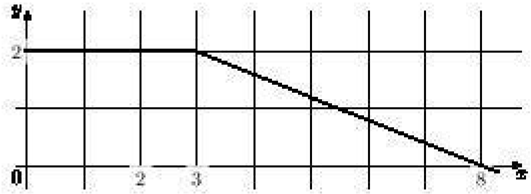


5.1.3.(323175) На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ – одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале (–2;4). Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-1;3]$.

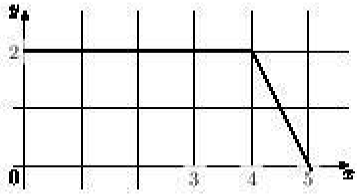


***

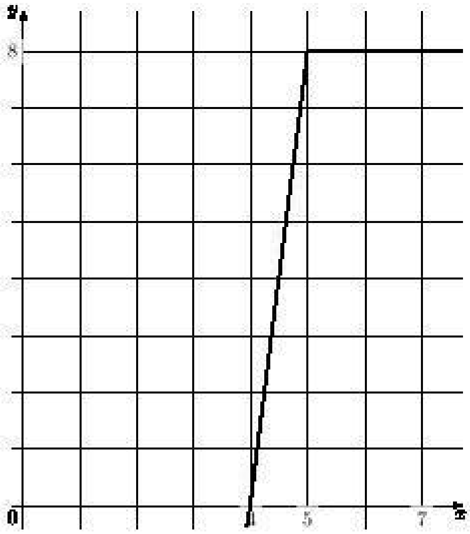
5.2.1.(прототип 323078) На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(2)$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$.



5.2.2.(323185) На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(5) - F(3)$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$.



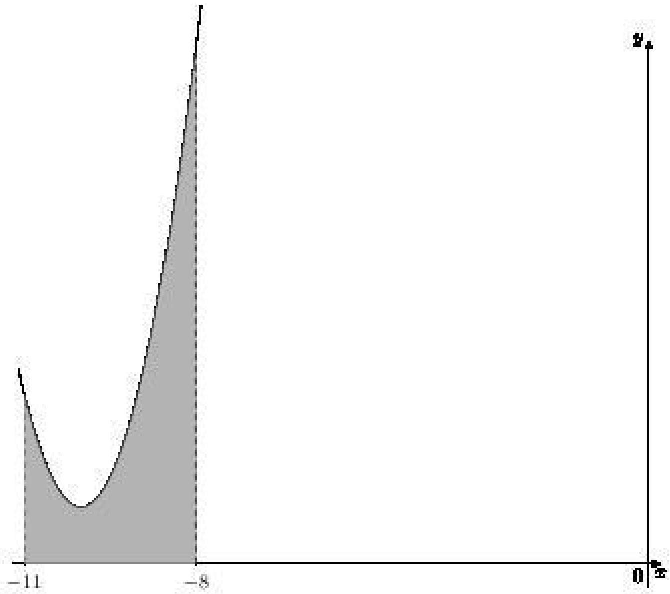
5.2.3.(323277) На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(7) - F(4)$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$.



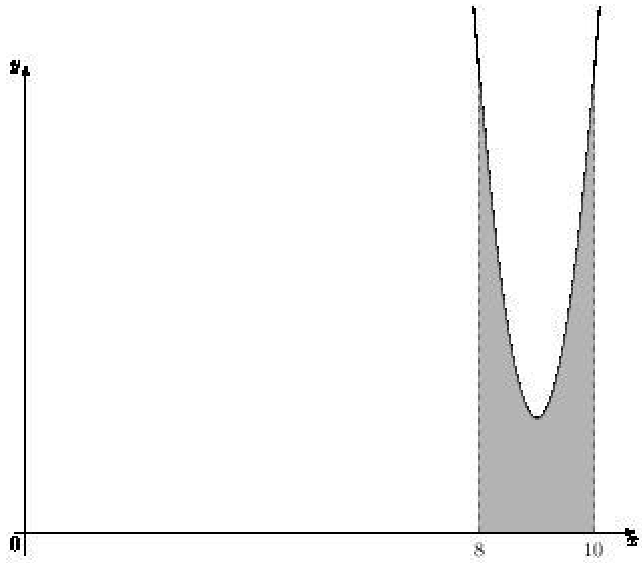
***

5.3.1.(прототип 323079) На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8}$ – одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

5.3.2.(323287) На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + 20x^2 + 201x - \frac{6}{7}$ – одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



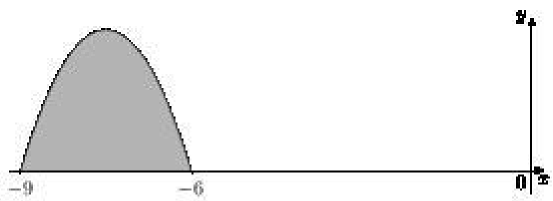
5.3.3.(323373) На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = 2x^3 - 54x^2 + 488x - \frac{3}{4}$ – одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



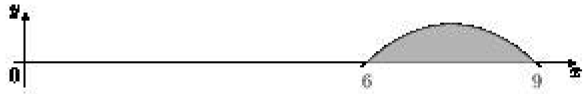
***

5.4.1.(прототип 323080) На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -x^3 - 27x^2 - 240x - 8$ – одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

5.4.2.(323389) На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -\frac{11}{30}x^3 - \frac{33}{4}x^2 - \frac{297}{5}x - \frac{1}{2}$ – одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



5.4.3.(323473) На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -\frac{1}{10}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{81}{5}x - \frac{5}{2}$ – одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



6. Дополнительные задачи

1. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 2 - x^2 + 3x^4$ в его точке с абсциссой $x_0 = -1$.

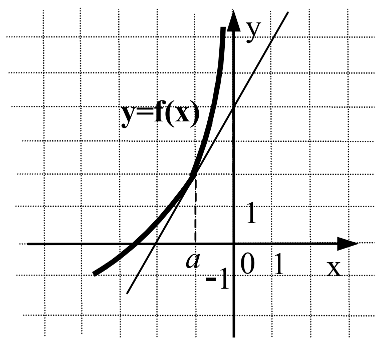
2. К графику функции $f(x) = -2x^2 + 5x - 17$ в точке с абсциссой $x_0 = \dfrac{3}{4}$ проведена касательная. Найдите тангенс угла наклона касательной к оси Ox.

3. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 10\sin x + 22x$ в точке с абсциссой $x_0 = -\pi$.

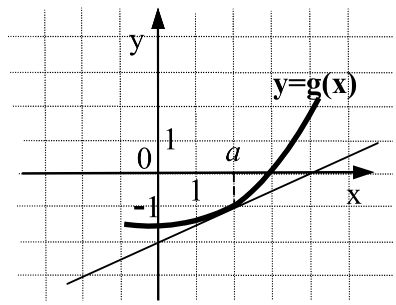
4. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой $y = 4x^2 - 6x + 1$ в точке $A(1;-1)$.

5. Касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = 2$, имеет вид $2y + 3x - 1 = 0$. Найдите $y'(2)$.

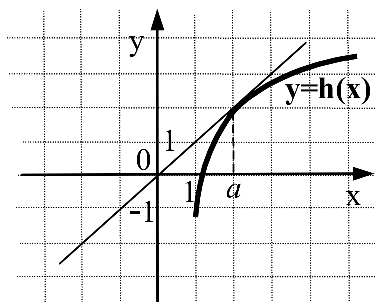
6. На рисунках изображены графики функций и касательные к ним в точке a. Укажите функцию, производная которой в точке a равна 1.



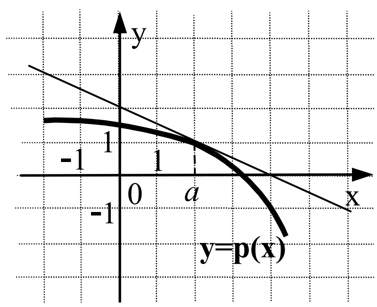
1)



2)

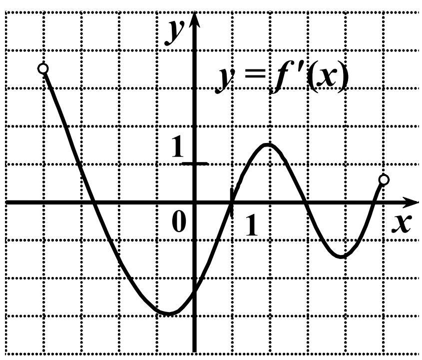


3)



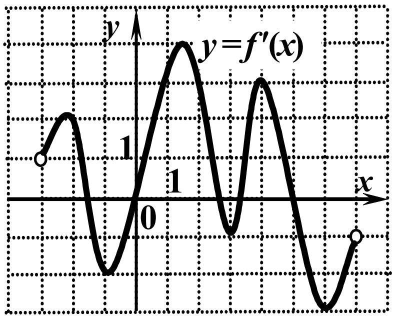
4)

7. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4;5)$. На рисунке изображен график ее производной.



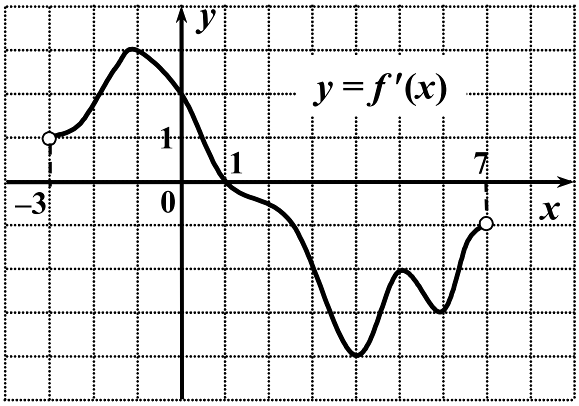
а) Найдите число касательных к графику функции $y = f(x)$, которые наклонены под углом в 45° к положительному направлению оси абсцисс.
б) Найдите наименьшее значение, которое принимает тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$.
в) Найдите количество точек графика функции, в которых касательные наклонены под углом 120° к положительному направлению оси абсцисс.
г) К графику функции $y = f(x)$ проведена касательная в точке с абсциссой $x_0 = -3$. Определите градусную меру угла наклона касательной.

8. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3;7)$. График ее производной изображен на рисунке.



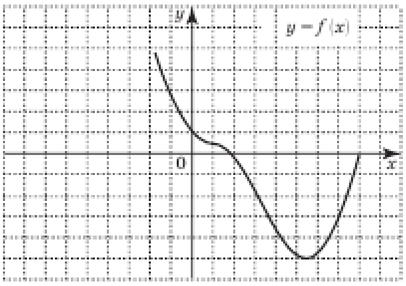
а) Укажите количество промежутков, на которых функция возрастает.
б) Укажите количество промежутков, на которых функция убывает.
в) Укажите количество точек минимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(-3;7)$.
г) Укажите количество точек максимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(-3;7)$.
д) Укажите количество промежутков, на которых функция $y = f''(x)$ положительна.

9. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3;7)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите точку x_0, в которой функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение.

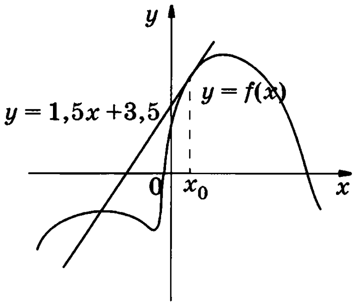


10. Найдите длину промежутка возрастания функции $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 15x$.

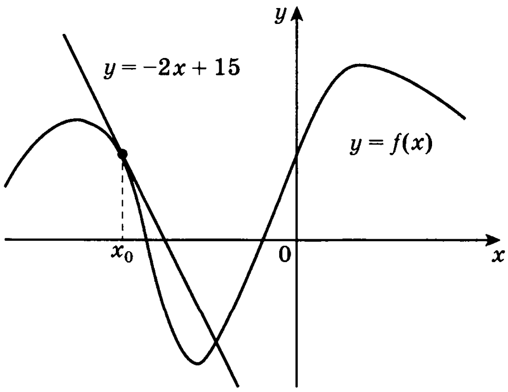
11. На рисунке представлен график функции $f(x) = x^4 - x^3 + bx + c$. Определите знаки коэффициентов *b* и *c*.



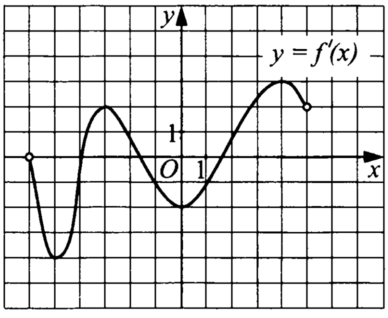
12. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке x_0. Уравнение касательной дано на рисунке. Найдите значение производной функции $y = 2f(x) - 1$ в точке x_0.



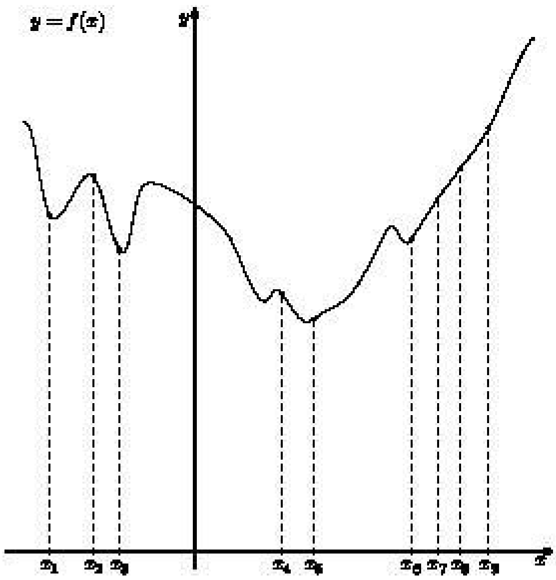
13. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке x_0. Уравнение касательной дано на рисунке. Найдите значение производной функции $y = -\frac{1}{4}f(x) + 5$ в точке x_0.



14. Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-6;5)$. На рисунке изображен график производной функции. Найдите наибольшее и наименьшее значение углового коэффициента касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$.

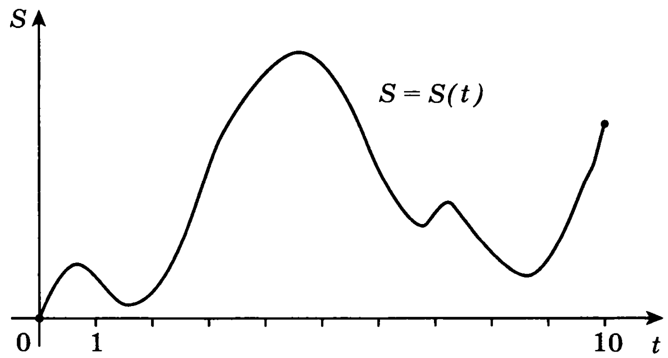


15. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и девять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, ..., x_9$. Сколько из этих точек являются решениями неравенства $f'(x) < 0$?

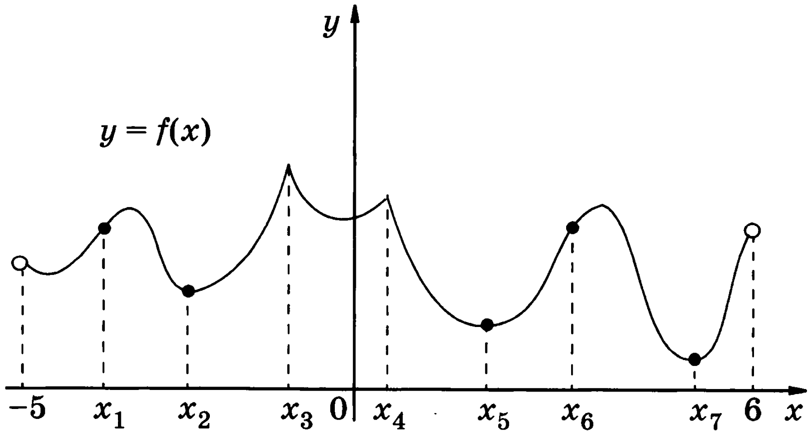


16. Материальная точка *M* начинает движение от точки *A* и движется по прямой на протяжении 10 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки *A* до точки *M* со временем. На оси абсцисс откладывается время *t* в секундах, на оси ординат - расстояние *S* в метрах.

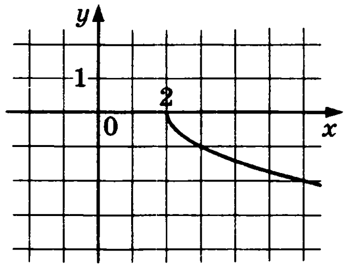
Определите, сколько раз за время движения скорость точки М обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).



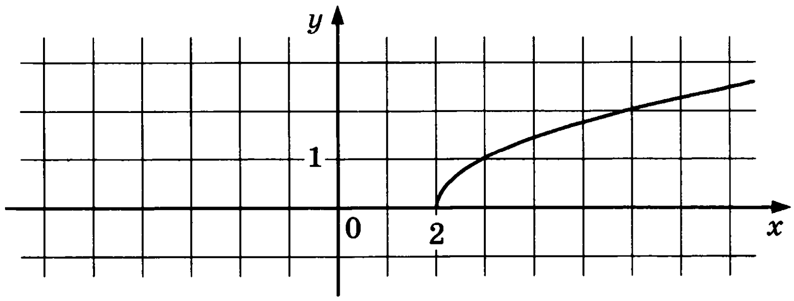
17. Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-5;6)$. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Найдите среди точек $x_1, x_2, x_3, ..., x_7$ те точки, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю. В ответ запишите количество найденных точек.



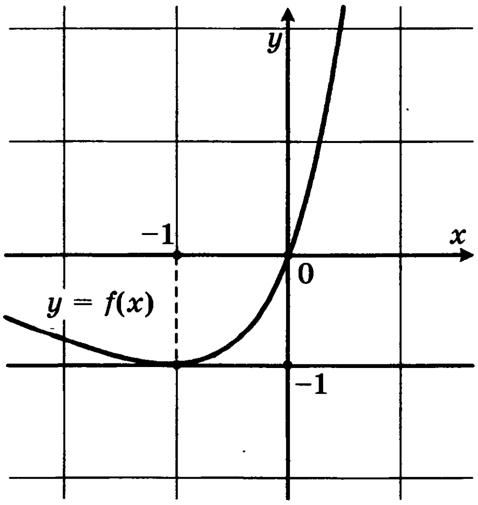
18. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через точку $(-1;1)$, касается этого графика в точке с абсциссой 3. Найдите $f'(3)$.



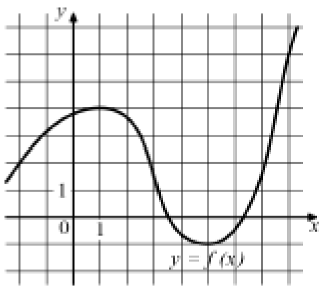
19. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через точку $(-6;-1)$, касается этого графика в точке с абсциссой 6. Найдите $f'(6)$.



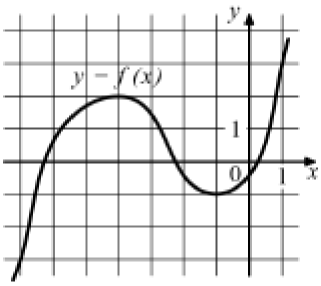
20. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой –1. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0 = -1$.



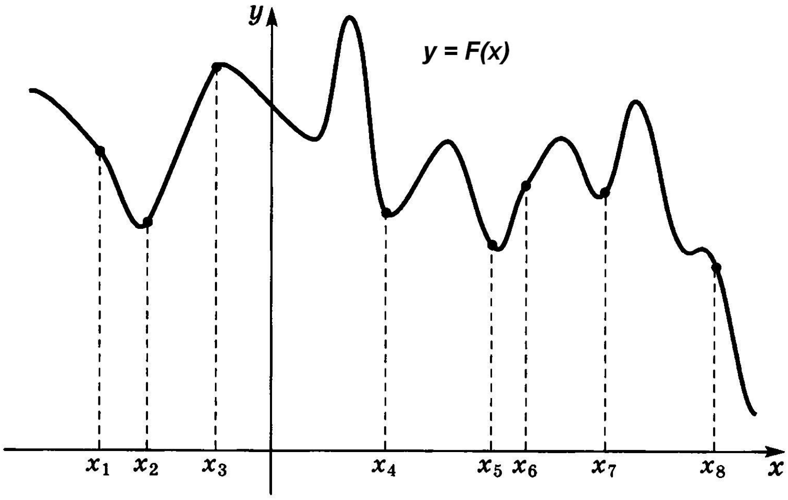
21. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Найдите наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-1;8]$.



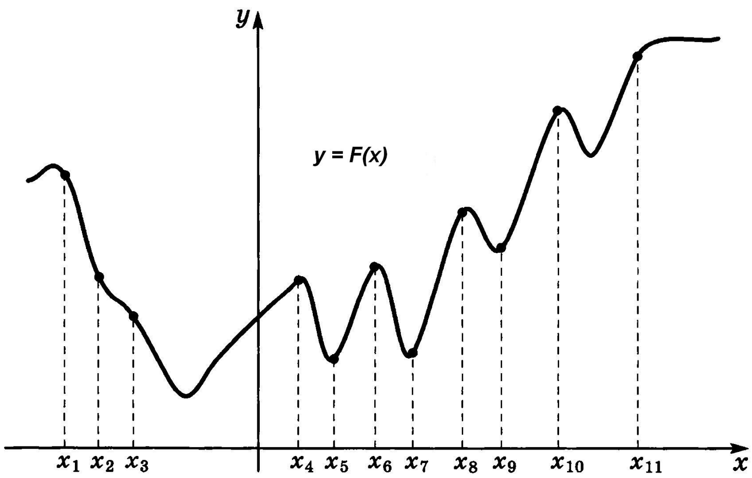
22. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Найдите наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-7;0]$.



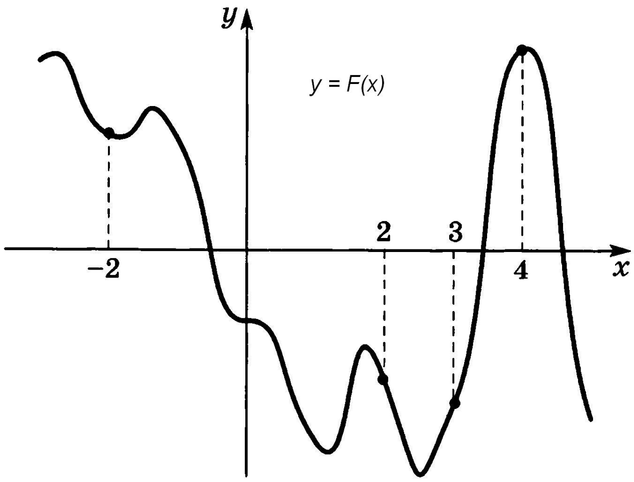
23. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ функции $f(x)$ и 8 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, ..., x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ положительна?



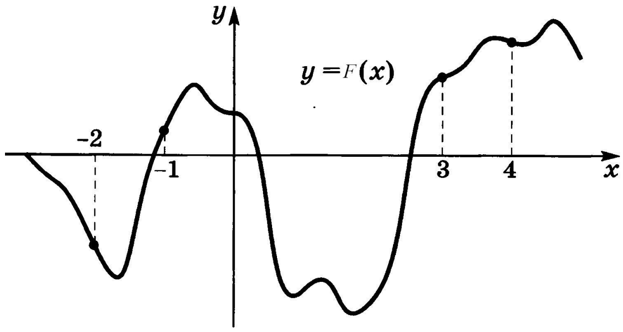
24. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ функции $f(x)$ и 11 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, ..., x_{11}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ отрицательна?



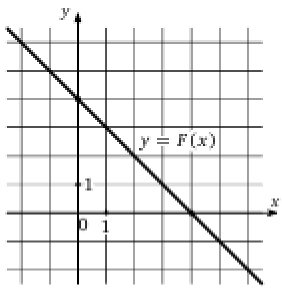
25. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ функции $f(x)$ и отмечены точки –2, 2, 3, 4. В какой из этих точек значение функции $f(x)$ наименьшее? В ответе укажите эту точку.



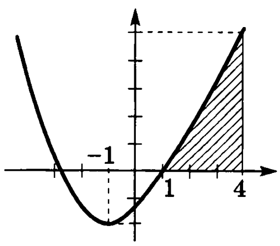
26. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ функции $f(x)$ и отмечены точки –2, 1, 3, 4. В какой из этих точек значение функции $f(x)$ наибольшее? В ответе укажите эту точку.



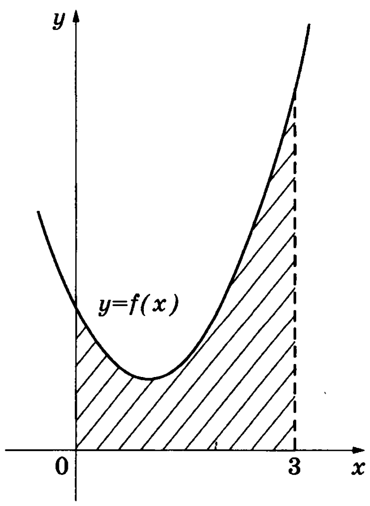
27. Прямая, изображенная на рисунке, является графиком одной из первообразных функции $y = f(x)$. Найдите $f(1)$.



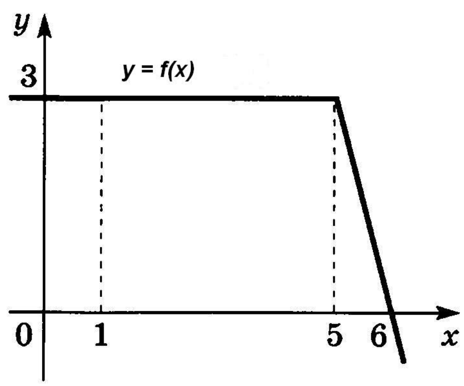
28. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, одна из первообразных которой имеет вид $F(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + 17$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



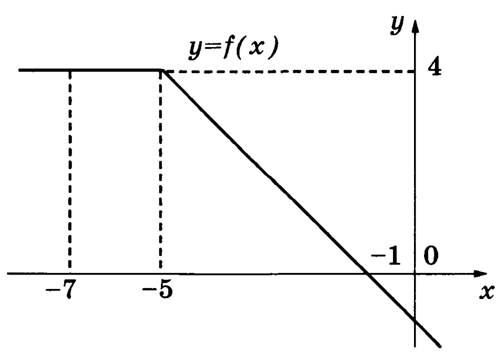
29. На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Одна из первообразных этой функции имеет вид $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - 3$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



30. На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл $\int_{1}^{6} f(x)dx$.



31. На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл $\int_{-7}^{-1} f(x)dx$.



Решения заданий-прототипов

1. Геометрический смысл производной

1.1.1. *Решение.* Условие параллельности двух прямых $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ - равенство их угловых коэффициентов, т.е. $k_1=k_2$. Угловой коэффициент прямой $y=7x-5$, очевидно, $k_1=7$. Тогда $k_2=7$. Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y=x^2+6x-8$ в точке с абсциссой x_0, равен значению производной этой функции $y'=2x+6$ в точке x_0, то есть. $k_2=2x_0+6$. Получаем $7=2x_0+6$ или $x_0=0,5$.
Ответ: 0,5.
1.2.1. *Решение.* Запишем первое условие касания прямой $y=-4x-11$ и графика функции $y=x^3+7x^2+7x-6$ в точке с абсциссой x_0 (равенство значения производной функции в этой точке и углового коэффициента прямой): $3x_0{}^2+14x_0+7=-4$. Этому условию удовлетворяют $x_0=-1$ и $x_0=-\frac{11}{3}$. Второе условие касания прямой $y=-4x-11$ и графика функции $y=x^3+7x^2+7x-6$ в точке с абсциссой x_0 (равенство значений функций при $x=x_0$) $x_0{}^3+7x_0{}^2+7x_0-6=-4x_0-11$ выполняется только для $x_0=-1$.
Ответ: –1.
1.3.1. *Решение.* 1-й способ. Так как касательная – предельное положение секущей, то в точке касания квадратное уравнение $ax^2+2x+3=3x+1$ или $ax^2-x+2=0$ ($a\neq 0$) должно иметь два совпадающих корня. Приравнивая дискриминант данного квадратного уравнения $D=1-8a$ к нулю, получаем $1-8a=0$ или $a=0,125$.

2-й способ. Используем условия касания прямой и графика данной функции в точке с абсциссой x_0.

$$\begin{cases}2ax_0+2=3,\\ ax_0^2+2x_0+3=3x_0+1.\end{cases}\quad \begin{cases}a=\dfrac{1}{2x_0},\\ \dfrac{1}{2x_0}\cdot x_0^2+2x_0+3=3x_0+1.\end{cases}\quad \begin{cases}a=\dfrac{1}{8},\\ x_0=4.\end{cases}$$

Ответ: 0,125.
1.4.1. *Решение.* 1-й способ. Так как касательная – предельное положение секущей, то в точке касания квадратное уравнение $28x^2+bx+15=-5x+8$ или $28x^2+(b+5)x+7=0$ должно иметь два совпадающих корня $x_0=-\frac{b+5}{56}$. Приравнивая дискриминант данного квадратного уравнения $D=(b+5)^2-4\cdot 28\cdot 7=(b+5)^2-28^2$ к нулю, получаем $(b-23)(b+33)=0$ или $\left[\begin{aligned}&b=23,\\ &b=-33.\end{aligned}\right.$

При $b=23$ абсцисса точки касания $x_0=-\frac{23+5}{56}=-\frac{28}{56}=-\frac{1}{2}$ и она меньше нуля (не удовлетворяет условию), при $b=-33$ абсцисса точки касания $x_0=-\frac{-33+5}{56}=\frac{28}{56}=\frac{1}{2}$ и она больше нуля.

2-й способ. Используем условия касания прямой и графика данной функции в точке с абсциссой x_0.

$$\begin{cases} 56x_0 + b = -5, \\ 28x_0^2 + bx_0 + 15 = -5x_0 + 8, \\ x_0 > 0. \end{cases} \begin{cases} b = -5 - 56x_0, \\ 28x_0^2 + (-5 - 56x_0)x_0 + 15 = -5x_0 + 8, \\ x_0 > 0. \end{cases} \begin{cases} b = -33, \\ x_0 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: –33.

1.5.1. *Решение.* 1-й способ. Так как касательная – предельное положение секущей, то в точке касания квадратное уравнение $3x^2 - 3x + c = 3x + 4$ или $3x^2 - 6x + c - 4 = 0$ должно иметь два совпадающих корня. Приравнивая дискриминант данного квадратного уравнения $D = 36 - 12(c-4)$ к нулю, получаем $3 - c + 4 = 0$ или $c = 7$.

2-й способ. Используем условия касания прямой и графика данной функции в точке с абсциссой x_0.

$$\begin{cases} 6x_0 - 3 = 3, \\ 3x_0^2 - 3x_0 + c = 3x_0 + 4. \end{cases} \begin{cases} x_0 = 1, \\ 3\cdot 1^2 - 3\cdot 1 + c = 3\cdot 1 + 4. \end{cases} \begin{cases} x_0 = 1, \\ c = 7. \end{cases}$$

Ответ: 7.

2. Физический (механический) смысл производной

2.1.1. *Решение*. Скорость материальной точки в произвольный момент времени $t \ge 0$ равна $\upsilon(t) = x'(t) = 12t - 48$. В момент времени $t = 9$ ее скорость $\upsilon(9) = 12\cdot 9 - 48 = 60$.

Ответ: 60.

2.2.1. *Решение*. Скорость материальной точки в произвольный момент времени $t \ge 0$ равна $\upsilon(t) = x'(t) = \dfrac{3}{2}t^2 - 6t + 2$. В момент времени $t = 6$ ее скорость $\upsilon(6) = \dfrac{3}{2}\cdot 6^2 - 6\cdot 6 + 2 = 20$.

Ответ: 20.

2.3.1. *Решение*. Скорость материальной точки в произвольный момент времени $t \ge 0$ равна $\upsilon(t) = x'(t) = -4t^3 + 18t^2 + 5$. В момент времени $t = 3$ ее скорость $\upsilon(3) = -4\cdot 3^3 + 18\cdot 3^2 + 5 = 59$.

Ответ: 59.

2.4.1. *Решение*. Скорость материальной точки в произвольный момент времени $t \ge 0$ равна $\upsilon(t) = x'(t) = 2t - 13$. Пусть в момент времени t_0 ее скорость была равна 3. Составим уравнение $2t_0 - 13 = 3$. Оно имеет единственное решение $t_0 = 8$.

Ответ: 8.

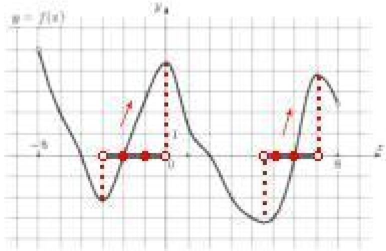
2.5.1. *Решение*. Скорость материальной точки в произвольный момент времени $t \ge 0$ равна $\upsilon(t) = x'(t) = t^2 - 6t - 5$. Пусть в момент времени t_0 ее скорость была равна 2. Составим уравнение $t_0{}^2 - 6t_0 - 5 = 2$. Решая уравнение с учетом условия $t \ge 0$, получим $t_0 = 7$.

Ответ: 7.

3. График функции

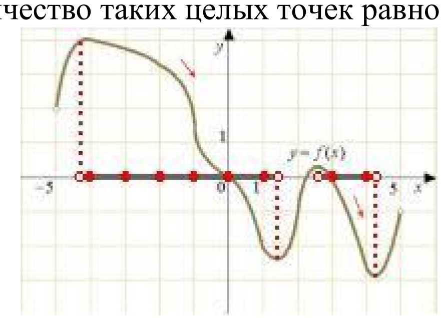
Промежутки монотонности функции

3.1.1. *Решение*. Если дифференцируемая функция возрастает на промежутке, то ее производная неотрицательна на этом промежутке. Исключаем концы промежутков возрастания, в которых производная обращается в нуль. Целые точки из интервалов возрастания функции: –2; –1; 5; 6. Количество таких целых точек равно 4.



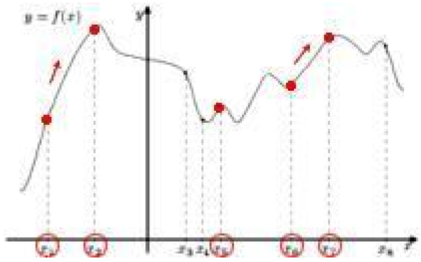
Ответ: 4.

3.2.1. *Решение*. Если дифференцируемая функция убывает на промежутке, то ее производная неположительна на этом промежутке. Исключаем концы промежутков убывания, в которых производная обращается в нуль. Целые точки из интервалов убывания функции: –4; –3; –2; –1; 0; 1; 3; 4. Количество таких целых точек равно 8.



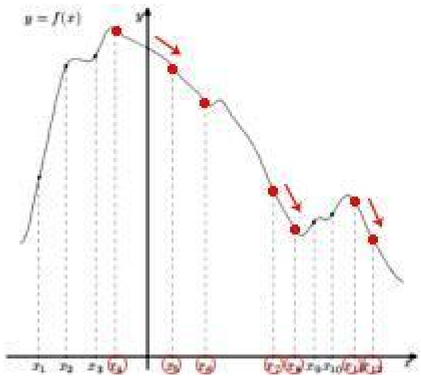
Ответ: 8.

3.3.1. *Решение*. Если дифференцируемая функция возрастает на промежутке, то ее производная неотрицательна на этом промежутке. Данные точки, принадлежащие интервалам возрастания функции: x_1, x_2, x_5, x_6, x_7. Количество этих точек равно 5.



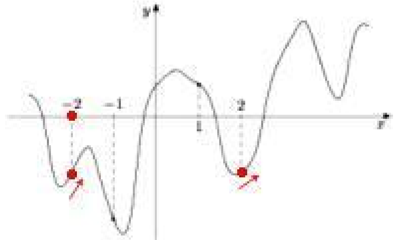
Ответ: 5.

3.4.1. *Решение*. Если дифференцируемая функция убывает на промежутке, то ее производная неположительна на этом промежутке. Данные точки, принадлежащие интервалам убывания функции: $x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{11}, x_{12}$. Количество этих точек равно 7.



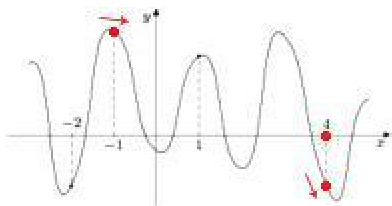
Ответ: 7.

3.5.1. *Решение*. Точки –1 и 1 принадлежат интервалам убывания функции и значения производной в них отрицательны. Рассмотрим точки –2 и 2, принадлежащие интервалам возрастания функции, так как значения производной в них положительны. Так как вблизи точки –2 график функции идет круче, чем вблизи точки 2, то значение производной в точке –2 будет наибольшим. По-другому: угол наклона касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой –2 больше, чем угол наклона касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой 2, причем касательные образуют с положительным направлением оси *x* острые углы. Так как $f'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha$, то $f'(-2) > f'(2) > 0$.



Ответ: –2.

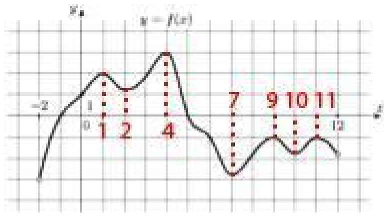
3.6.1. *Решение*. Точки –2 и 1 принадлежат промежуткам возрастания функции и значения производной в них положительны. Рассмотрим точки –1 и 4, принадлежащие интервалам убывания функции, так как значения производной в них отрицательны. Угол наклона касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой –1 больше, чем угол наклона касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой 4, причем касательные образуют с положительным направлением оси *x* тупые углы. Так как $f'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha$, то $f'(4) < f'(-1) < 0$.



Ответ: 4.

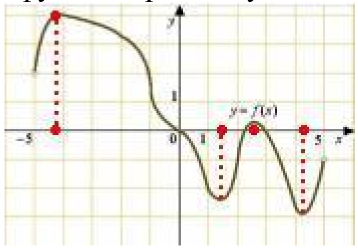
Точки экстремума функции

3.7.1. *Решение*. Функция имеет максимумы в точках 1, 4, 9, 11 и минимумы в точках 2, 7, 10. Сумма всех точек экстремума $1+2+4+7+9+10+11=44$.



Ответ: 44.

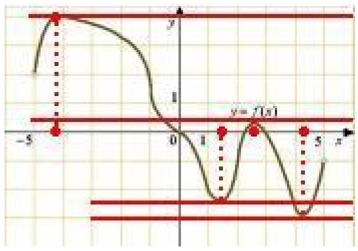
3.8.1. *Решение*. Производная функции $f'(x)$ равна нулю в точках экстремума функции $f(x)$. Количество точек экстремума функции равно 4 (две точки максимума и две точки минимума). Значит, производная функции равна нулю в четырех точках.



Ответ: 4.

Касательная к графику функции

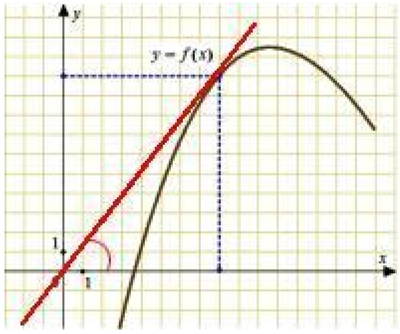
3.9.1. *Решение*. Условие параллельности двух прямых – равенство их угловых коэффициентов. Угловой коэффициент прямой $y = 6$ равен 0. Тогда угловой коэффициент касательной тоже должен быть равен нулю. Следовательно, значения производной в точках касания должны быть также равны нулю. Это условие выполнено для точек экстремума функции. Количество таких точек на указанном интервале равно 4 (две точки максимума и две точки минимума).



Ответ: 4.

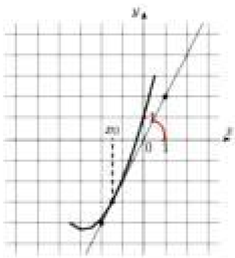
3.10.1. *Решение*. 1-й способ. Найдем угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в точке $x_0 = 8$. Эта касательная проходит через точки (0;0) и (8;10). Ее угловой коэффициент $k = \frac{10-0}{8-0} = \frac{5}{4} = 1,25$. Так как $f'(x_0) = k$, то значение производной функции в точке $x_0 = 8$ также равно 1,25.

2-й способ. Из прямоугольного треугольника, содержащего угол наклона α касательной, найдем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1,25$. Так как $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, то $f'(x_0) = 1,25$.



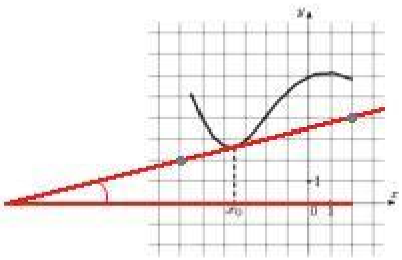
Ответ: 1,25.

3.11.1. *Решение*. Найдем угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в точке x_0. Эта касательная проходит через точки (–2; –4) и (1;2). Ее угловой коэффициент $k = \dfrac{2-(-4)}{1-(-2)} = \dfrac{6}{3} = 2$. Так как $f'(x_0) = k$, то значение производной функции в точке x_0 также равно 2.



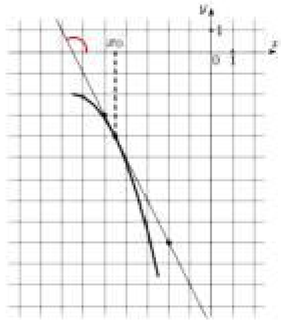
Ответ: 2.

3.12.1. *Решение*. Найдем угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в точке x_0. Эта касательная проходит через точки (–6;2) и (2;4). Ее угловой коэффициент $k = \dfrac{4-2}{2-(-6)} = \dfrac{2}{8} = 0,25$. Так как $f'(x_0) = k$, то значение производной функции в точке x_0 также равно 0,25.



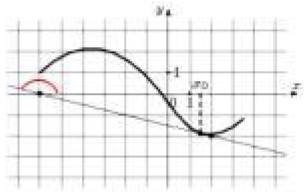
Ответ: 0,25.

3.13.1. *Решение*. Найдем угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в точке x_0. Эта касательная проходит через точки (–5; –3) и (–2; –9). Ее угловой коэффициент $k = \dfrac{-9-(-3)}{-2-(-5)} = \dfrac{-6}{3} = -2$. Так как $f'(x_0) = k$, то значение производной функции в точке x_0 также равно –2.



Ответ: –2.

3.14.1. *Решение*. Найдем угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в точке x_0. Эта касательная проходит через точки (–6;0) и (2; –2). Ее угловой коэффициент $k=\frac{-2-0}{2-(-6)}=\frac{-2}{8}=-0,25$. Так как $f'(x_0)=k$, то значение производной функции в точке x_0 также равно –0,25.

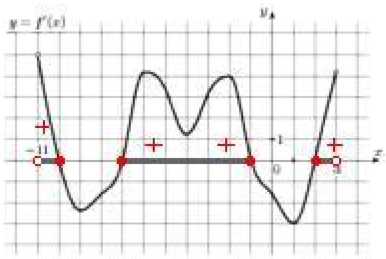


Ответ: –0,25.

4. График производной функции

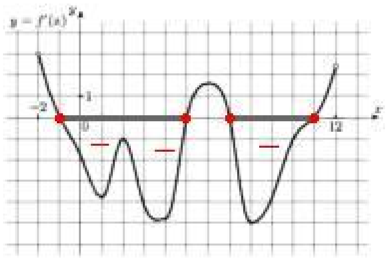
Промежутки монотонности функции

4.1.1. *Решение*. Функция возрастает на интервале, если на этом интервале ее производная положительна. Производная положительна на интервалах $(-11;-10)$, $(-7;-1)$, $(2;3)$. Длина наибольшего из них $(-7;-1)$ равна 6.



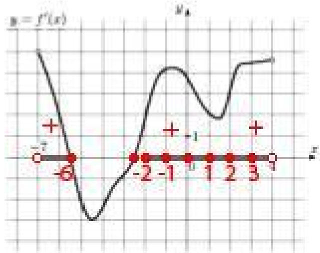
Ответ: 6.

4.2.1. *Решение*. Функция убывает на интервале, если на этом интервале ее производная отрицательна. Производная отрицательна на интервалах $(-1;5)$, $(7;11)$. Длина наибольшего из них $(-1;5)$ равна 6.



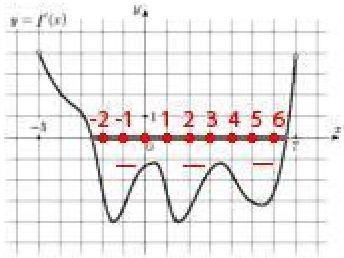
Ответ: 6.

4.3.1. *Решение*. Функция возрастает на интервале, если на этом интервале ее производная положительна. Целые точки, в которых производная положительна: –6; –2; –1; 0; 1; 2; 3. Их сумма $-6-2-1+1+2+3=-3$.



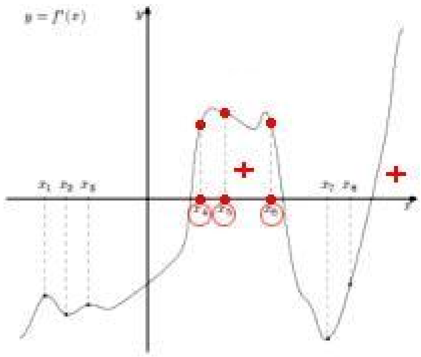
Ответ: –3.

4.4.1. *Решение*. Функция убывает на интервале, если на этом интервале ее производная отрицательна. Целые точки, в которых производная отрицательна: –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Их сумма $-2-1+0+1+2+3+4+5+6=18$.



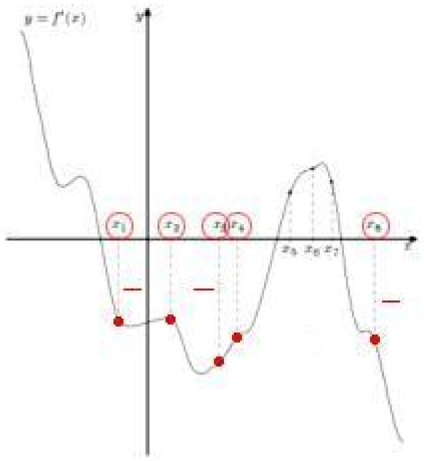
Ответ: 18.

4.5.1. *Решение*. Функция возрастает на интервале, если на этом интервале ее производная положительна. Производная положительна в точках x_4, x_5, x_6. Всего таких точек 3.



Ответ: 3.

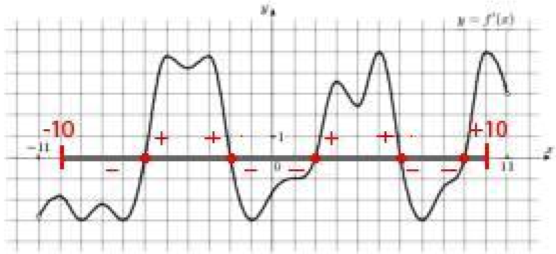
4.6.1. *Решение*. Функция убывает на интервале, если на этом интервале ее производная отрицательна. Производная отрицательна в точках x_1, x_2, x_3, x_4, x_8. Всего таких точек 5.



Ответ: 5.

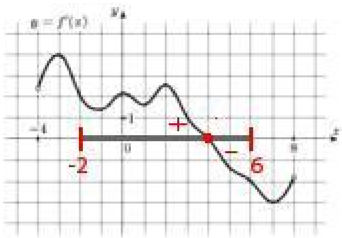
Точки экстремума функции

4.7.1. *Решение*. Функция имеет точку экстремума, если в этой точке производная данной функции равна нулю и меняет знак. На отрезке $[-10;10]$ таких точек 5.



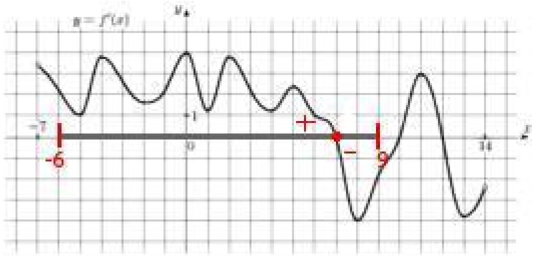
Ответ: 5.

4.8.1. *Решение*. Функция имеет точку экстремума, если в этой точке производная данной функции равна нулю и меняет знак. На отрезке $[-2;6]$ это происходит в единственной точке 4.



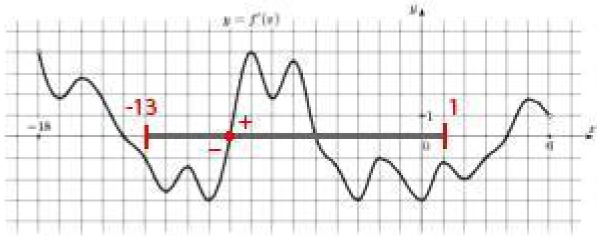
Ответ: 4.

4.9.1. *Решение*. Функция имеет точку максимума, если в этой точке производная данной функции равна нулю и меняет знак с положительного на отрицательный. На отрезке $[-6;9]$ имеется единственная точка максимума $x_{\max} = 7$.



Ответ: 1.

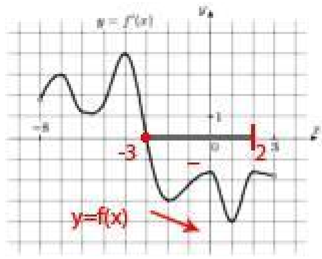
4.10.1. *Решение*. Функция имеет точку минимума, если в этой точке производная данной функции равна нулю и меняет знак с отрицательного на положительный. На отрезке $[-13;1]$ имеется единственная точка минимума $x_{\min} = -5$.



Ответ: 1.

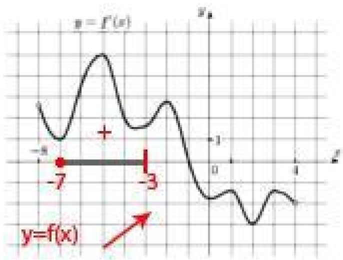
Наибольшее и наименьшее значения функции

4.11.1. *Решение*. На отрезке $[-3;2]$ производная функции неположительна, следовательно, сама функция на этом отрезке убывает и принимает свое наибольшее значение на левом конце отрезка, в точке –3.



Ответ: –3.

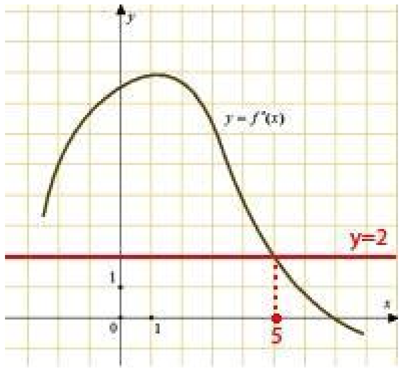
4.12.1. *Решение*. На отрезке $[-7;-3]$ производная функции положительна, следовательно, сама функция на этом отрезке возрастает и принимает свое наименьшее значение на левом конце отрезка, в точке –7.



Ответ: –7.

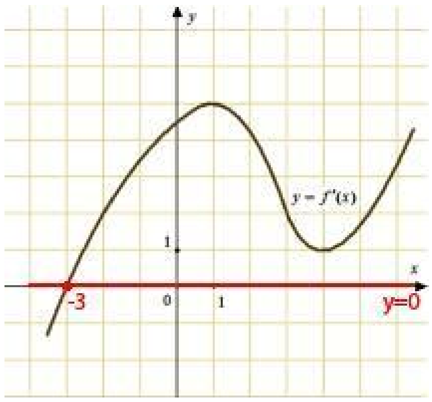
Касательная к графику функции

4.13.1. *Решение*. Угловой коэффициент прямой $y = 2x - 2$ равен 2. Касательная параллельна данной прямой, поэтому ее угловой коэффициент равен 2. Используя формулу $f'(x_0) = k$, имеем $f'(x_0) = 2$. По графику производной функции получаем значение $x_0 = 5$.



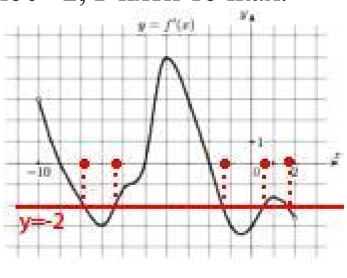
Ответ: 5.

4.14.1. *Решение.* Угловой коэффициент касательной, параллельной оси абсцисс, равен 0. Используя формулу $f'(x_0)=k$, имеем $f'(x_0)=0$. По графику производной функции получаем значение $x_0=-3$.



Ответ: –3.

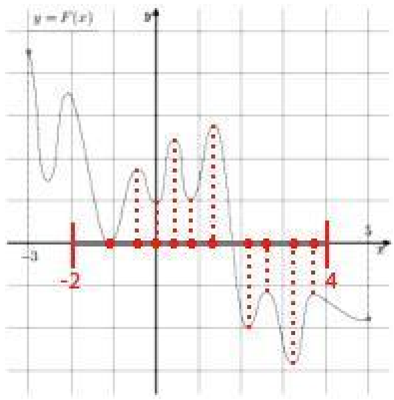
4.15.1. *Решение.* Угловой коэффициент прямой $y=-2x-11$ равен –2. Касательная параллельна данной прямой, поэтому ее угловой коэффициент равен –2. Используя формулу $f'(x_0)=k$, имеем $f'(x_0)=-2$. По графику производной функции получаем, что производная принимает значение, равное –2, в пяти точках.



Ответ: 5.

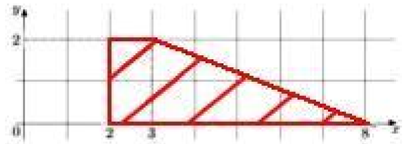
5. Первообразная функции

5.1.1. *Решение.* Так как $f(x)=F'(x)$, равенство $f(x)=0$ будет выполнено в точках экстремума функции $y=F(x)$. На отрезке $[-2;4]$ таких точек 10.



Ответ: 10.

5.2.1. *Решение.* Значение $F(8)-F(2)$ равно площади трапеции, ограниченной графиком функции и прямыми $x=2, x=8, y=0$. Площадь этой трапеции с основаниями 6 и 1 и высотой 2 считаем по стандартной формуле $S=\frac{6+1}{2}\cdot 2=7$.



Ответ: 7.

5.3.1. *Решение. 1-й способ.* Воспользуемся формулой $S=F(b)-F(a)$. Тогда имеем

$$S=F(-9)-F(-11)=(-9)^3+30(-9)^2+302(-9)-\frac{15}{8}-\left((-11)^3+30(-11)^2+302(-11)-\frac{15}{8}\right)=$$

$$=-729+1331+30(81-121)+302(-9+11)=602-1200+604=6.$$

2-й способ. Воспользуемся схемой Горнера для вычисления $F(-9)$ и $F(-11)$.

	1	**30**	**302**	**–15/8**
–9	1	21	113	–1017–15/8
–11	1	19	93	–1023–15/8

Тогда $S=\left(-1017-\frac{15}{8}\right)-\left(-1023-\frac{15}{8}\right)=6$.

3-й способ. Площадь закрашенной фигуры $S=\int\limits_{-11}^{-9} f(x)dx$, где

$$f(x)=F'(x)=3x^2+60x+302=3\left(x+10\right)^2+2.$$

Найдем эту площадь $S=\int\limits_{-11}^{-9}\left(3\left(x+10\right)^2+2\right)dx$

Заменим переменную интегрирования. Пусть $x+10=t$, $x=t-10$, $dx=dt$, тогда $t=-1$ при $x=-11$ и $t=1$ при $x=-9$. Формула для вычисления площади примет вид

$$S=\int\limits_{-1}^{1}\left(3t^2+2\right)dt=2\int\limits_{0}^{1}\left(3t^2+2\right)dt=2\left(t^3+2t\right)\Big|_0^1=2\left(1+2\right)=6.$$

Ответ: 6.

5.4.1. *Решение. 1-й способ.* Воспользуемся формулой $S=F(b)-F(a)$. Тогда имеем

$$S=F(-8)-F(-10)=-(-8)^3-27(-8)^2-240(-8)-8-\left(-(-10)^3-27(-10)^2-240(-10)-8\right)=$$

$$= 512 - 1000 - 27(64 - 100) - 240(-8 + 10) = -488 + 972 - 480 = 4 .$$

2-й способ. Воспользуемся схемой Горнера для вычисления $F(-8)$ и $F(-10)$.

	–1	**–27**	**–240**	**–8**
–8	–1	–19	–88	696
–10	–1	–17	–70	692

Тогда $S = 696 - 692 = 4$.

3-й способ. Площадь закрашенной фигуры $S = \int\limits_{-10}^{-8} f(x)dx$, где

$$f(x) = F'(x) = -3x^2 - 54x - 240 = -3\left(x + 9\right)^2 + 3 .$$

Найдем эту площадь $S = \int\limits_{-10}^{-8} \left(-3\left(x + 9\right)^2 + 3\right) dx$.

Заменим переменную интегрирования. Пусть $x + 9 = t$, $x = t - 9$, $dx = dt$, тогда $t = -1$ при $x = -10$ и $t = 1$ при $x = -8$. Формула для вычисления площади примет вид

$$S = \int\limits_{-1}^{1} \left(-3t^2 + 3\right) dt = 2\int\limits_{0}^{1} \left(-3t^2 + 3\right) dt = 2\left(-t^3 + 3t\right)\Big|_0^1 = 2\left(-1 + 3\right) = 4 .$$

Ответ: 4.

Ответы

1. Геометрический смысл производной

***

1.1.1. 0,5. **1.1.2. -**4. **1.1.3. -**4.

***

1.2.1. –1. **1.2.2.** 0. **1.2.3.** –1.

***

1.3.1. 0,125. **1.3.2.** 15. **1.3.3.** 24.

***

1.4.1. –33. **1.4.2.** 21. **1.4.3.** 21.

***

1.5.1. 7. **1.5.2.** 17. **1.5.3.** 18.

2. Физический (механический) смысл производной

***

2.1.1. 60. **2.1.2.** 6. **2.1.3.** 4.

***

2.2.1. 20. **2.2.2.** 51. **2.2.3.** 24.

***

2.3.1. 59. **2.3.2.** 55. **2.3.3.** 60.

***

2.4.1. 8. **2.4.2.** 3. **2.4.3.** 8.

***

2.5.1. 7. **2.5.2.** 1. **2.5.3.** 14.

3. График функции

<u>Промежутки монотонности функции</u>

***

3.1.1. 4. **3.1.2.** 6. **3.1.3.** 3.

***

3.2.1. 8. **3.2.2.** 3. **3.2.3.** 6.

***

3.3.1. 5. **3.3.2.** 4. **3.3.3.** 5.

***

3.4.1. 7. **3.4.2.** 4. **3.4.3.** 6.

***

3.5.1. –2. **3.5.2.** –2. **3.5.3.** 2.

***

3.6.1. 4. **3.6.2.** 1. **3.6.3.** 2.

<u>Точки экстремума функции</u>

***

3.7.1. 44. **3.7.2.** 0. **3.7.3.** 12.

***

3.8.1. 4. **3.8.2.** 4. **3.8.3.** 8.

<u>Касательная к графику функции</u>

***

3.9.1. 4. **3.9.2.** 6. **3.9.3.** 8.

***

3.10.1. 1,25. **3.10.2.** –0,6.

***

3.11.1. 2. **3.11.2.** 1. **3.11.3.** 1,75.

***

3.12.1. 0,25. **3.12.2.** 0,25. **3.12.3.** 0,25.

***

3.13.1. –2. **3.13.2.** –1,75. **3.13.3. –**1,25.

***

3.14.1. –0,25. **3.14.2.** –0,25. **3.14.3.** –0,25.

4. График производной функции

<u>Промежутки монотонности функции</u>

***

4.1.1. 6. **4.1.2.** 5. **4.1.3.** 3.

***

4.2.1. 6. **4.2.2.** 6. **4.2.3.** 5.

***

4.3.1. –3. **4.3.2.** 9. **4.3.3.** –19.

***

4.4.1. 18. **4.4.2.** –17. **4.4.3.** 5.

***

4.5.1. 3. **4.5.2.** 2. **4.5.3.** 2.

***

4.6.1. 5. **4.6.2.** 2. **4.6.3.** 7.

<u>Точки экстремума функции</u>

***

4.7.1. 5. **4.7.2.** 3. **4.7.3.** 4.

***

4.8.1. 4. **4.8.2.** –3. **4.8.3.** –2.

***

4.9.1. 1. **4.9.2.** 1. **4.9.3.** 3.

***

4.10.1. 1. **4.10.2.** 2. **4.10.3.** 1.

<u>Наибольшее и наименьшее значения функции</u>

***

4.11.1. –3. **4.11.2.** –2. **4.11.3.** –5.

***

4.12.1. –7. **4.12.2.** –1. **4.12.3.** –5.

Касательная к графику функции

***

4.13.1. 5. **4.13.2.** 5.

***

4.14.1. –3.

***

4.15.1. 5. **4.15.2.** 3. **4.15.3.** 5.

Серия задач на одном графике

***

4.16.1. –4. **4.16.2.** 1. **4.16.3.** 4. **4.16.4.** 2. **4.16.5.** –2.

***

4.17.1. –5. **4.17.2.** 5. **4.17.3.** 2. **4.17.4.** 4. **4.17.5.** 12.

***

4.18.1. –4. **4.18.2.** 3. **4.18.3.** –10. **4.18.4.** 3. **4.18.5.** 4.

5. Первообразная функции

***

5.1.1. 10. **5.1.2.** 10. **5.1.3.** 8.

***

5.2.1. 7. **5.2.2.** 3. **5.2.3.** 20.

***

5.3.1. 6. **5.3.2.** 9. **5.3.3.** 8.

***

5.4.1. 4. **5.4.2.** 4,95. **5.4.3.** 1,35.

6. Дополнительные задачи

1. –10. **2.** 2. **3.** 12. **4.** 2. **5.** –1,5. **6.** $y = h(x)$. **7. а)** 3. **б)** –3. **в)** 2. **г)** 45°. **8. а)** 3. **б)** 3. **в)** 2. **г)** 3. **д)** 4. **9.** 1. **10.** 2. **11.** $c > 0$; $b < 0$. **12.** 3. **13.** 0,5. **14.** 3 и –4. **15.** 4. **16.** 6. **17.** 3. **18.** $-0,5$. **19.** 0,25. **20.** 0. **21.** 6. **22.** –3. **23.** 4. **24.** 3. **25.** 2. **26.** –1. **27.** –1. **28.** 13,5. **29.** 6. **30.** 13,5. **31.** 16.

Список и источники литературы

1. Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений,– 5-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2005. – 395 с.: ил.

2. ЕГЭ 2014. Математика. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2(С) / И.Р. Высоцкий, П.И. Захаров, В.С. Панферов, С.Е. Посицельский, А.В. Семенов, А.Л. Семенов, М.А. Семенова, И.Н. Сергеев, В.А. Смирнов, С.А. Шестаков, Д.Э. Шноль, И.В. Ященко; под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2014. – 215, [1] с. (Серия «ЕГЭ. Типовые тестовые задания») ISBN 978-5-377-06990-4

3. ЕГЭ-20014. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов /под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко – М.: Издательство «Национальное образование», 2013. – 192 с. – (ЕГЭ-2014. ФИПИ – школе).

4. Ященко И. В., Захаров П. И. ЕГЭ 2014. Математика. Задача B8. Геометрический смысл производной. Рабочая тетрадь / Под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко. 5-е изд., исправл. – М.: МЦНМО, 2014. – 96 с.

5. www.mathege.ru – Математика ЕГЭ 2013 (открытый банк заданий).

6. www.alexlarin.net – сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.

7. http://eek.diary.ru/ – сайт по оказанию помощи абитуриентам, студентам, учителям по математике.

8. http://reshuege.ru – Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ЕГЭ. Математика».